



# Conception de lois de commande à hautes performances pour l'optique adaptative des grands / très grands télescopes

Carlos Correia

## ► To cite this version:

Carlos Correia. Conception de lois de commande à hautes performances pour l'optique adaptative des grands / très grands télescopes. Astrophysique [astro-ph]. Université Paris-Nord - Paris XIII, 2010. Français. NNT : . tel-00516866

**HAL Id: tel-00516866**

**<https://theses.hal.science/tel-00516866>**

Submitted on 12 Sep 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ECOLE DOCTORALE GALILÉE  
UNIVERSITÉ Paris 13  
Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales

N° attribué par la bibliothèque

THÈSE

pour obtenir le grade de  
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 13  
Discipline : PHYSIQUE

présentée et soutenue publiquement  
par

**Carlos CORREIA**

18 Mars 2010

Titre

**CONCEPTION DE LOIS DE COMMANDE  
À HAUTES PERFORMANCES POUR  
L'OPTIQUE ADAPTATIVE  
DES GRANDS / TRÈS GRANDS TÉLESCOPES**

Directeur de thèse :  
**M. Henri-François RAYNAUD**

**JURY**

<b>M. Jean-Pierre VÉRAN</b>	(Rapporteur examinateur)
<b>MME. Alina VODA</b>	(Rapporteur examinateur)
<b>M. Paulo GARCIA</b>	(Examineur)
<b>M. Pierre-Yves MADEC</b>	(Examineur)
<b>M. Patrick VIARIS de LESEGNO</b>	(Examineur)
<b>M. Henri-François RAYNAUD</b>	(Directeur de thèse)
<b>M. Jean-Marc CONAN</b>	(Examineur)
<b>MME. Caroline KULCSÁR</b>	(Examineur)





*« Le mystère est d'ailleurs comme l'atmosphère où baignent les très belles œuvres d'art. »*

*Auguste RODIN, L'Art, nouv. éd., Paris, Grasset, 1924.*

Dessin à l'encre de Chine inspiré par la sculpture « le Penseur » d'Auguste Rodin. ©APSousa2010.





## Remerciements

Ce projet a en effet commencé il y a plus de 4 ans avec la préparation du dossier et du programme pour l'obtention du financement de thèse. En toute vérité je ne me tromperais pas en avouant que tout avait commencé la première fois que j'ai croisé J.-M. Conan en 2005 lors d'une conférence. Là déjà j'ai pu m'apercevoir de ses talents de persuasion, de sa gentillesse et de sa patience.

C'est donc depuis les tous premiers échanges que ce projet compte avec l'appui inconditionnel de Jean-Marc Conan, Caroline Kulcsàr et Henri-François Raynaud. Je répète l'épithète des trois mousquetaires utilisé lors de la soutenance pour décrire ce que je pense être un groupe de travail exceptionnel, où convergent des capacités scientifiques, pédagogiques et humaines. A eux l'expression de ma profonde gratitude pour leur soutien et le temps qu'ils m'ont consacré pendant ces années (et ce n'était pas peu...). J'ai eu beaucoup de plaisir de mon côté à travailler avec vous et j'espère bien que cela puisse encore continuer.

Je remercie l'ensemble du jury de thèse, plus particulièrement les rapporteurs Jean-Pierre Vérant et Alina Voda pour leur lecture attentive et les questions constructives qui en sont ressorties. Je n'oublie pas Patrick Viaris de Lesegno qui a accompagné de près les développements de ce travail ainsi que Paulo Garcia, lui qui m'a fait entrer dans le domaine de la haute résolution angulaire alors que j'étais encore à l'université.

La thèse est un travail composite qui bénéficie des apports et du professionnalisme de plusieurs personnes et qui est influencée par l'ambiance dans laquelle elle se déroule. A cet égard, je tiens à remercier toute l'équipe HRA de l'ONERA, plus particulièrement Thierry Fusco, Laurent Mugnier, Cyril Petit, Serge Meimon et Anne Costille pour leur suivi et esprit critique sur mes travaux. Je remercie aussi les doctorants et jeunes embauchés notamment Noah Schwartz et Jean-François Sauvage avec lesquels j'ai co-réalisé le court métrage de divulgation scientifique *Superphoton et le jeu de l'OA* et partagé de très bons moments soit de travail soit de détente. Et, car on en voulait plus, je remercie l'équipe réalisatrice de notre deuxième tour avec le court-métrage *Panique à Vera Cruz* et l'organisation du festival *Les chercheurs font leur cinéma*.

Dans le cadre du projet *ELT-DS*<sup>1</sup> je souhaite remercier Michel Tallon, Clémentine Béchet, Miska Le Louarn, Fernando Quirós-Pacheco et Iciar Montilla avec lesquels j'ai pu collaborer pendant tout ce temps. Je remercie également Dominique le Bihan et Alain Cosnuau à l'ONERA pour les échanges fructueux sous la voûte du projet *Cassiopée*, Rami Gasmi et Pascal Jagourel du côté de l'Observatoire de Paris et enfin Jean-Christophe Siquin de la société CILAS.

Je voudrais aussi adresser mes remerciements aux doctorants, avec lesquels j'ai organisé la conférence Elbereth 2008 destinée aux doctorants en Astronomie et Astrophysique en Île de France, ainsi qu'à l'Institut d'Astrophysique de Paris, à l'ONERA et au groupement scientifique PHASE pour leur soutien financier et logistique.

Si j'ai pu mener à bien cette thèse cela est sûrement dû au support de mes amis qui ont sans doute contribué à la bonne humeur maintenue ces trois années. Je pense plus particulièrement à mes colocataires Duarte, Marina et Patrícia avec lesquels j'ai passé les soirées les plus folles ainsi qu'à ma famille Lina, Helena, Silvia, Pedro et Juliana qui m'a tant aidé. Une pensée spécialement affectueuse pour ma compagne Tânia qui m'a toujours reconduit à l'équilibre.

---

<sup>1</sup>Étude de conception pour le télescope ELT Européen.

Cette thèse a été réalisée dans le cadre du programme de formation de ressources humaines (POPH-QREN). Elle a bénéficié du support de la Fondation Portugaise de Science et Technologie (FCT) et de la co-participation financière de l'Union Européenne.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>15</b>
1.1	400 ans d'instrumentation en astronomie . . . . .	15
1.2	Problématique spécifique et objectifs de la thèse . . . . .	16
1.3	Structure du manuscrit de thèse . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Optique adaptative pour l'astronomie</b>	<b>19</b>
2.1	Introduction . . . . .	21
2.2	Principes sur la formation d'images . . . . .	21
2.3	Les effets optiques de la turbulence atmosphérique . . . . .	22
2.3.1	Fluctuations d'indice de réfraction . . . . .	22
2.3.1.1	Répartition en altitude - profil de $C_n^2(h)$ . . . . .	24
2.3.1.2	Propriétés générales des fluctuations d'indice . . . . .	24
2.3.2	Caractérisation statistique de la phase . . . . .	24
2.3.2.1	Fluctuations de la phase . . . . .	25
2.3.2.2	Statistiques spatiales . . . . .	25
2.3.2.3	Statistiques temporelles . . . . .	27
2.3.2.4	Perturbations optiques d'origine mécanique . . . . .	28
2.4	Imagerie à travers la turbulence . . . . .	29
2.4.1	Critères de performance optique . . . . .	29
2.4.2	La base des polynômes de Zernike . . . . .	30
2.4.2.1	Modélisation avec la base de polynômes de Zernike . . . . .	30
2.4.3	L'angle d'arrivée . . . . .	33
2.4.3.1	Angle d'arrivée et modes tip/tilt de Zernike . . . . .	34
2.5	Le principe de l'optique adaptative . . . . .	34
2.5.1	Composants et modélisation classique . . . . .	35
2.5.1.1	L'analyseur de surface d'onde . . . . .	36
2.5.1.2	Le miroir déformable . . . . .	38
2.5.2	Chronogramme d'opérations . . . . .	40
2.5.3	Les différents espaces en OA . . . . .	41
2.5.3.1	Espace commandable . . . . .	41
2.5.3.2	Espace mesurable . . . . .	42
2.6	Budget d'erreurs en OA . . . . .	42
2.6.1	Erreurs dues à l'OA . . . . .	43
2.7	Différents concepts d'Optique Adaptative . . . . .	44
2.8	Introduction à la commande en OA . . . . .	46
2.8.1	Modélisation continue des boucles de commande . . . . .	46

2.8.2	Modélisation discrète des boucles de commande . . . . .	47
2.8.2.1	L'approche par $C(z)$ intégrateur . . . . .	49
2.8.2.2	Approches modales à gain optimisé - IGMO . . . . .	49
<b>3</b>	<b>Reconstruction statique de front d'onde – l'approche Fourier</b>	<b>51</b>
3.1	Introduction . . . . .	53
3.2	Reconstruction statique de front d'onde – un problème inverse . . . . .	54
3.2.1	Problème direct . . . . .	54
3.2.2	Reconstruction de front d'onde : un problème inverse . . . . .	56
3.2.2.1	Approche moindres carrés sur les données . . . . .	56
3.2.2.2	Approche bayésienne à variance minimale : solutions MMSE et MAP . . . . .	56
3.2.3	Le problème inverse en OA - inversion de la matrice d'interaction . . . . .	58
3.2.3.1	Obtention de la matrice de commande $M_{com}$ . . . . .	59
3.2.3.2	Sur les origines du gaufre localisé . . . . .	60
3.2.4	Méthodes de reconstruction en OA . . . . .	61
3.3	Bases de modélisation – révision succincte de la littérature . . . . .	61
3.3.1	Modélisation zonale . . . . .	62
3.3.1.1	Modèles zonaux de l'ASO HS . . . . .	62
3.4	Modélisation du problème direct dans l'espace de Fourier . . . . .	64
3.4.1	Modèle de mesure complet dans le domaine des fréquences spatiales . . . . .	65
3.4.2	Représentation de Fourier des modèles simplifiés de l'ASO HS . . . . .	67
3.4.2.1	Hudgin . . . . .	67
3.4.2.2	Fried . . . . .	68
3.4.2.3	Southwell . . . . .	68
3.4.2.4	Augmentation de la conformité des modèles au HS – décalages latéraux . . . . .	68
3.5	Le problème inverse de reconstruction dans le domaine des fréquences spatiales . . . . .	68
3.5.1	Reconstruction moindres carrés sur les données . . . . .	69
3.5.2	Reconstruction régularisée - le filtre MMSE de Wiener . . . . .	70
3.5.3	Extension des pupilles circulaires aux pupilles carrées . . . . .	70
3.5.3.1	Application des contraintes d'extension aux modèles du HS . . . . .	71
3.5.3.2	Extrapolation spectrale itérative . . . . .	73
3.5.3.3	Récapitulatif des méthodes d'extension . . . . .	76
3.5.4	Suppression des modes non-vus . . . . .	76
3.5.5	Représentation continue de la phase . . . . .	76
3.5.6	Coefficients de propagation du bruit . . . . .	77
3.6	Aperçu général des résultats des articles Correia et al., 2007 et Correia et al. 2008a . . . . .	78
3.7	Simulations Monte Carlo – résultats de reconstruction statique . . . . .	79
3.7.1	Paramètres de simulation . . . . .	79
3.7.2	Performance optique en fonction des méthodes d'extension . . . . .	81
3.7.3	Effets du sous-éclairage . . . . .	82
3.7.4	Effet de l'occultation centrale . . . . .	83
3.7.5	Effet de la magnitude de l'étoile guide . . . . .	84
3.7.6	Propagation du bruit dans la reconstruction . . . . .	84
3.7.7	Etude de la FEP – localisation des erreurs . . . . .	86
3.8	Adaptation à la boucle fermée . . . . .	86

3.9	Exploitation en temps réel – analyse algorithmique . . . . .	87
3.10	Bilan et ouverture . . . . .	89
<b>4</b>	<b>Commande à variance minimale : l’approche linéaire quadratique gaussienne</b>	<b>91</b>
4.1	Introduction . . . . .	93
4.2	Rappels sur le formalisme d’état . . . . .	93
4.2.1	Notions préliminaires . . . . .	94
4.2.1.1	Solution exacte . . . . .	94
4.2.2	Stabilité, commandabilité, observabilité . . . . .	95
4.2.3	Liens avec les fonctions de transfert . . . . .	97
4.3	Commande stochastique optimale - introduction à l’approche LQG . . . . .	97
4.3.1	Fondements de la théorie . . . . .	98
4.3.1.1	Séparation de l’estimation et de la commande . . . . .	99
4.3.1.2	Synthèse des étapes de l’approche LQG . . . . .	100
4.3.2	Estimation optimale linéaire par filtrage de Kalman . . . . .	100
4.3.2.1	Le filtre de Kalman à gain asymptotique . . . . .	102
4.3.3	Fonctions de transfert du régulateur LQG . . . . .	104
4.3.4	Synthèse de la solution LQG . . . . .	105
4.4	L’approche LQG en OA . . . . .	105
4.4.1	Travaux précédents : de l’intégrateur à la commande LQG . . . . .	105
4.4.2	Définition du critère d’optimalité . . . . .	108
4.4.3	Développement de la solution LQG . . . . .	108
4.4.3.1	Développement du critère . . . . .	108
4.4.3.2	Identification de la sortie-critère . . . . .	109
4.4.3.3	Structuration du régulateur . . . . .	110
4.4.4	Modèle pour la commande . . . . .	111
4.4.4.1	Propriétés du modèle . . . . .	112
4.4.4.2	Fonctions de transfert : un exemple sur le mode tip/tilt . . . . .	113
4.4.5	Évaluation de performance . . . . .	113
4.4.6	Commande optimale statique pour les OA en boucle ouverte . . . . .	116
4.5	Modèles d’évolution temporelle de la phase . . . . .	117
4.5.1	Méthodes d’identification de paramètres . . . . .	117
4.5.2	Modèles auto-régressifs du 1er ordre . . . . .	117
4.5.2.1	Corrélations temporelles des polynômes de Zernike . . . . .	119
4.5.3	Modèles auto-régressifs du second ordre . . . . .	119
4.6	Réinterprétation sous formalisme d’état d’autres approches de commande . . . . .	120
4.6.1	Intégrateur . . . . .	123
4.6.2	<i>POLC</i> . . . . .	124
4.6.3	FrIM-IMC . . . . .	125
4.7	Bilan . . . . .	127
<b>5</b>	<b>Commande LQG pour des OA à grand nombre de degrés de liberté</b>	<b>129</b>
5.1	Introduction . . . . .	131
5.2	Mise en œuvre de la commande optimale . . . . .	132
5.2.1	Calculs hors ligne : équation de Riccati d’estimation et gain de Kalman . . . . .	133
5.2.1.1	Détermination de la solution de la Riccati d’estimation . . . . .	133
5.2.2	Calculs temps réel . . . . .	135

5.2.2.1	Récapitulatif des méthodes de calcul existantes . . . . .	137
5.3	Commande LQG adaptée aux grands nombres de degrés de liberté . . . . .	137
5.3.1	Modélisation creuse avec une base zonale . . . . .	138
5.3.1.1	Mesure estimée . . . . .	138
5.3.1.2	Mise à jour . . . . .	139
5.3.1.3	Prédiction . . . . .	140
5.3.1.4	Projection orthogonale sur l'espace des commandes . . . . .	142
5.4	Filtrage de Kalman par résolution d'un système d'équations linéaires $Ax = b$ creux . . . . .	142
5.4.1	Approximation de la matrice de covariance d'erreur d'estimation . . . . .	144
5.4.1.1	Obtention des facteurs multiplicatifs . . . . .	146
5.5	Résolution itérative de systèmes linéaires creux du type $Ax = b$ . . . . .	148
5.5.1	Gradients conjugués . . . . .	148
5.5.2	Pré-conditionnement . . . . .	149
5.5.2.1	Pré-conditionneur diagonal . . . . .	150
5.5.2.2	Méthode multigrilles . . . . .	150
5.5.2.3	Pré-conditionnement en espace de Fourier . . . . .	151
5.5.2.4	Définition du pré-conditionneur dans l'espace Fourier . . . . .	151
5.6	Mise en œuvre de la commande LQG itérative . . . . .	152
5.6.1	Multiplication par la matrice $A$ . . . . .	153
5.6.2	Multiplication par le pré-conditionneur $C^{-1}$ dans l'espace de Fourier . . . . .	153
5.7	Analyse algorithmique . . . . .	154
5.7.1	Structure des calculs . . . . .	154
5.7.1.1	Commande par intégrateur . . . . .	154
5.7.1.2	Commande LQG . . . . .	155
5.7.2	Complexité calculatoire . . . . .	155
5.8	Performances avec approximations : évaluation par simulations Monte Carlo . . . . .	157
5.8.1	Validation des approches de commande LQG avec une modélisation zonale . . . . .	157
5.8.2	Le FD-PCG-LQG . . . . .	160
5.8.2.1	Rapidité de convergence . . . . .	161
5.9	Extensions aux OA grand champ . . . . .	162
5.9.1	Complexité calculatoire . . . . .	162
5.9.2	Le FD-PCG-LQG en OAMC . . . . .	164
5.10	Bilan et ouverture . . . . .	165
<b>6</b>	<b>Commande optimale en OA pour des miroirs à réponse non instantanée</b> . . . . .	<b>167</b>
6.1	Introduction . . . . .	169
6.2	Commande LQG pour des MD à réponse non instantanée . . . . .	171
6.2.1	Développement du critère d'optimisation continu . . . . .	171
6.2.2	Construction du modèle d'état pour la commande . . . . .	178
6.2.2.1	En information complète . . . . .	178
6.2.2.2	En information incomplète . . . . .	183
6.2.3	Évaluation de performance . . . . .	184
6.2.3.1	Énergie de commande . . . . .	185
6.2.4	Régulateur optimal et régulateurs sous-optimaux . . . . .	186
6.3	Le concept <i>woofer-tweeter</i> . . . . .	186
6.3.1	Critère d'optimisation . . . . .	188
6.3.2	Modèle d'état étendu pour la commande . . . . .	190

6.4	Modèles linéaires . . . . .	192
6.4.1	La perturbation de phase . . . . .	192
6.4.2	Le miroir déformable . . . . .	193
6.4.2.1	Commande modale . . . . .	193
6.4.2.2	Modèles du premier ordre . . . . .	194
6.4.2.3	Modèles du second ordre . . . . .	195
6.5	Outils d'évaluation : calculs analytiques, simulations Monte Carlo . . . . .	196
6.5.1	Mise en œuvre du simulateur Monte Carlo . . . . .	197
6.6	Calculs analytiques - correction des modes de basculement . . . . .	198
6.6.1	Un cas simple : dynamiques du premier ordre . . . . .	198
6.6.1.1	Analyse fréquentielle . . . . .	199
6.6.1.2	Performance optique . . . . .	199
6.6.1.3	Robustesse des régulateurs . . . . .	201
6.6.2	Dynamiques du second ordre (perturbation et MD) . . . . .	201
6.6.2.1	Analyse fréquentielle . . . . .	202
6.6.2.2	Robustesse . . . . .	202
6.7	Aperçu général des résultats des articles soumis . . . . .	204
6.8	Le ELT Européen : dynamiques du second ordre . . . . .	204
6.8.1	Simulation avec modèle de perturbation identifié . . . . .	204
6.8.2	Série temporelle indépendante du modèle . . . . .	205
6.9	NFIRAOS, woofer-tweeter pour le TMT . . . . .	207
6.10	Bilan et discussion . . . . .	210
<b>7</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>211</b>
<b>8</b>	<b>Annexes</b>	<b>217</b>
8.1	Propriétés utiles . . . . .	217



## Notation

$x$	État, vecteur colonne
$\mathbf{x}, \mathbf{X}$	Transformée de Fourier de $x$ , $X$
$E\{x\}$	Espérance mathématique de $x$
$x_k \triangleq x(kT_s)$	Valeur de $x$ à l'instant $t = kT_s$
$\bar{x}_k \triangleq \frac{1}{T_s} \int_{(k-1)T_s}^{kT_s} x(t)dt$	Moyenne de $x$ sur l'intervalle $[kT_s, (k+1)T_s[$
$\hat{x}_k$	Estimée de $x$ à l'instant $t = kT_s$
$\hat{x}_{k l}$	Estimée de $x$ à l'instant $t = kT_s$ sachant toutes les mesures jusqu'à $t = lT_s$
$\tilde{x}_k = x_k - \hat{x}_k$	Erreur d'estimation de $x$ à l'instant $k$
$x^\top$	Transposée de $x$
$x^H$	Transposée hermitienne de $x$
$\mathcal{A}_d, \mathcal{B}_d, \mathcal{C}_d, \mathcal{D}_d, \Gamma_d$	Matrices d'un modèle d'état discret
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \Gamma$	ou modèle d'état continu
$\Sigma$	Matrice de covariance, symétrique et définie positive
$v$	Bruit blanc d'état continu de DSP $\Sigma_v$
$v_k$	Bruit blanc d'état discret de matrice de covariance $\Sigma_v$
$\Sigma_\infty, \Sigma_k$	Solutions de l'équation de Riccati d'estimation
$P_\infty, P_k$	Solutions de l'équation de Riccati de commande
$\mathcal{L}_\infty, \mathcal{H}_\infty$	Gains de Kalman
$s, y$	Mesures (fonction de la phase $\phi$ et du bruit $v$
$u$	Décisions de commande (abb. commande)
$J(u)$	Critère de performance
$Q, R, S$	Matrices de pondération dans l'approche LQG
tur	Attaché en indice aux modèles de perturbation de phase turbulente
$D, R$	Diamètre et rayon d'un télescope
m	Attaché en indice aux modèles de miroir déformable
c, d	Attaché en indice aux versions continues/discrètes
$\mathcal{F}$	Transformée de Fourier continue
$\mathbf{TF}$	Transformée de Fourier discrète
$\mathcal{Z}$	Transformée en $Z$
$z$	Variable d'intégration de la transformée en $\mathcal{Z}$
$\Lambda, \mathbf{W}$	Spectre spatial mono/bi dimensionnel
FEP	Fonction d'Étalement de Point
Airy	Fonction d'Airy
SR	Rapport de Strehl
D	Matrice de l'ASO
N	Concaténation des fonctions d'influence du MD
$\mathbf{D}, \mathbf{N}$	Transformée de Fourier de D et N
$M_{inter} = DN$	Matrice d'interaction
$M_{com}$	Matrice de commande
0, I	matrice zéro et identité de taille adéquate

$\Psi$	Espace des phases
$\mathcal{M}, \mathcal{M}^\perp$	Espace de phase engendré par les fonctions d'influence statique du MD
$\mathcal{S}, \mathcal{S}^\perp$	Espace de phase mesurable et commandables ; son complément
$\Omega$	Surface de la pupille
$r_0$	Paramètre de Fried
$L_0$	Echelle externe de la turbulence
$\nu$	Fréquence spatiale, $\text{m}^{-1}$
$f$	Fréquence temporelle, Hz
$\vec{v}, \mathbf{V}$	Vecteur vitesse de vent, module de la vitesse de vent
$C_n^2(h)$	Constante de structure de l'indice de réfraction
$\phi$	Phase turbulence dans la pupille
$T_s$	Période d'échantillonnage (temps de trame, temps d'intégration)
$Z_i$	$i^{\text{ème}}$ polynôme de Zernike
$a_i$	Coefficient du $i^{\text{ème}}$ polynôme de Zernike

## Acronymes et abréviations

AA, AoA	Angle d'Arrivée, <i>Angle of Arrival</i>
ARn	Modèle Auto-Régressif d'ordre $n$
AOF	<i>Adaptive Optics Facility</i>
ARE	Equation Algébrique de Riccati
ASO	Analyseur de Surface d'Onde
BF	Basses Fréquences, Boucle Fermée
BO	Boucle Ouverte
DOTA	Département d'Optique Théorique et Appliquée
DSP	Densité Spectrale de Puissance
EPICS	<i>Exo-Planet Imager for the ELT</i>
ELT	<i>Extremely Large Telescope</i>
E-ELT	<i>European Extremely Large Telescope</i>
ESO	<i>European Southern Observatory</i>
FCT	<i>Fundação para a Ciência e a Tecnologia</i>
FEP	Fonction d'Etalement de Point
FFT	<i>Fast Fourier Transform</i>
FT	Fonction de transfert
FTO	Fonction de transfert Optique
HF	Hautes Fréquences
HRA	Haute Résolution Angulaire
HS	Analyseur de Surface d'Onde Hartman-Shack
IGMO	Intégrateur à Gain Modal Optimisé
GNDL	Grand Nombre de Degrés de Liberté
GPI	<i>Gemini Planet Imager</i>
InfC	Information Complète
InfI	Information Incomplète
L2TI	Laboratoire de Transport et Traitement de l'Information
LQG	Approche linéaire, quadratique et Gaussienne
MD	Miroir Déformable
NAOS	<i>Nasmith Adaptive Optics System</i>
OA	Optique Adaptative
OAMC	Optique Adaptative Multi-Conjuguée
ONERA	Office National d'Etudes et Recherches Aéronautiques
POLC	<i>Pseudo Open-Loop Control</i>
RSB	Rapport Signal sur Bruit
SPHERE	<i>Spectro-Polarimeter High-contrast Exoplanet Research</i>
SR	Rapport de Strehl
TF	Transformée de Fourier
TMT	<i>Thirty Meter Telescope</i>
VLT	<i>Very Large Telescope</i>
VM	Variance Minimale
WT	Woofers-Tweeters

# Chapitre 1

## Introduction générale

### 1.1 400 ans d'instrumentation en astronomie

Voici 400 ans le premier télescope pointa vers le ciel. Fait accompli par Galileo Galilei avec une lunette d'à peine 2cm de diamètre permettant un grossissement d'environ 30x. Les conséquences de ses découvertes sont multiples. Elles ont notamment crédibilisé et popularisé les idées héliocentriques qui ont révolutionné la conception du système solaire hérité des Grecs. En 2009 l'UNESCO<sup>1</sup> et l'IAU<sup>2</sup> célèbrent le quatrième centenaire de cet événement incontournable et marquant de l'Histoire de la Science. Depuis que Galilée a pointé le ciel pour la première fois, les progrès instrumentaux ont été énormes. Le concept optique initial consistant en un assemblage de lentilles réfractives a cédé la place aux télescopes réflectifs et ensuite aux catadioptriques. Tout au long de son histoire la taille des télescopes est passée de quelques centimètres à des dizaines de mètres. La Fig. 1.1 décrit brièvement cette évolution sur les quatre derniers siècles. Elle repère aussi le point de transition où se trouvent les télescopes actuels : à la charnière entre les 10m et les 42m d'ici une décennie.

La taille des télescopes croît pour permettre l'augmentation de la surface collectrice en proportion du carré du diamètre. On peut donc s'attendre à capturer des photons de sources de plus en plus lointaines en quantité suffisante pour en retirer de l'information. De plus, la résolution est inversement proportionnelle au diamètre optique du télescope, c'est-à-dire, la capacité à distinguer deux points dans l'espace pour peu qu'ils soient séparés est fonction de la taille des télescopes. Cependant, l'observation depuis le sol est gravement affectée par les turbulences atmosphériques. Lors de la traversée de l'atmosphère le front d'onde lumineux, initialement plat, est déformé. Cela provoque une perte de résolution qui ne permet guère de dépasser celle de la lunette de Galilée !

Pour pallier cette limitation, des systèmes d'optique adaptative (OA) ont été conçus afin de déformer, à l'aide d'un miroir déformable (MD), le front d'onde en sens inverse. La résultante se veut aussi plate que possible. Ces systèmes opèrent en boucle fermée, avec un analyseur de surface d'onde (ASO) derrière le miroir déformable pour mesurer le résidu après correction. A l'aide d'un calculateur temps réel, la déformation du miroir est régulièrement mise à jour pour l'adapter au mieux aux perturbations sans cesse en évolution. Suite aux premiers systèmes d'OA COME-ON et ses successeurs COME-ON+ [Rousset *et al.*, 1990] et ADONIS [Beuzit et Hubin, 1993] installés aux télescopes de 3,6m de l'Observatoire européen austral (ESO) à Paranal (Chili), le système NAOS équipe les télescopes VLT de 8,2m de l'ESO [Rousset *et al.*, 2000]. Plusieurs autres observatoires se sont équipés de cette technologie. Les télescopes Keck, Gemini North et Subaru à Hawaii, Gemini

---

<sup>1</sup> Acronyme anglais pour *Organisation des Nations Unies pour l'Education, la Science et la Culture*

<sup>2</sup> Acronyme anglais pour *Union Astronomique Internationale*

South au Chili, le LBT en Arizona et le GTC aux îles Canaries en font partie d'une liste de plus en plus longue.

Ces systèmes ont permis de nombreuses découvertes majeures en astrophysique, qu'il s'agisse du système solaire ou extra-solaire ou encore extra-galactique. Parmi les découvertes les plus importantes, citons l'observation directe de planètes sur des systèmes extra-solaires [Chauvin *et al.*, 2004].

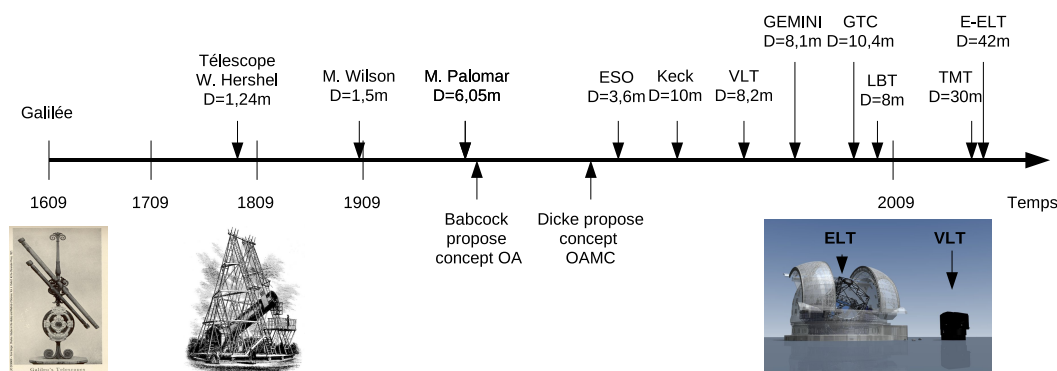


FIG. 1.1 – Historique succinct de l'évolution des télescopes depuis que Galilée pointa la première fois en 1609 voici 400 ans une lunette vers le ciel. Depuis que l'OA fut proposée par Babcock en 1953 seuls les télescopes équipés de cette technologie figurent sur la droite. La liste demeure non exhaustive. Images libres de droits.

## 1.2 Problématique spécifique et objectifs de la thèse

A l'heure actuelle, le passage des télescopes de classe 10m aux télescopes de type ELT<sup>3</sup> de tailles de 30m pour le projet TMT et 42m pour le ELT européen, pose d'innombrables défis en ce qui concerne la mise en œuvre des systèmes d'OA (voir la Fig. 1.1). La reconstruction de front d'onde et la commande des OA à grand nombre de degrés de liberté (GNDL) est parmi un des défis les plus importants. Ceci est d'autant plus vrai que les cadences de la commande augmentent. La commande en boucle fermée des OA a mérité une attention particulière [Gendron et Léna, 1994, Dessenne *et al.*, 1997], mais reste restreinte aux OA classiques et peu envisageable pour les systèmes à grand nombre de degrés de liberté.

Par ailleurs de nouveaux concepts généralisent l'OA classique aux OA grand champ encore plus complexes. Ces dernières visent une correction sur un champ d'observation plus étendu. Or, celui-ci est affecté par l'anisoplanétisme, du fait que la lumière issue d'objets dans différentes directions d'observation traverse des régions distinctes de l'atmosphère terrestre avant de parvenir aux détecteurs. Par conséquent, les déformations subies sont aussi distinctes. A cet égard, les idées de reconstruction tomographique initialement proposées par [Dicke, 1975] ont été ensuite développées conceptuellement par [Beckers, 1988], [Tallon *et al.*, 1992], [Fusco *et al.*, 1999] et [Ragazzoni *et al.*, 2000]. La performance de ces systèmes a été étudiée par [Ellerbroek, 1994], [Tokovinin *et al.*, 2000] et [Tokovinin et Viard, 2001] dans le domaine des fréquences spatiales. Un effort important de recherche a été consacré à l'optimisation de la reconstruction tomographique par [Fusco *et al.*, 2001] et

<sup>3</sup>Extremely Large Telescopes.

[Ellerbroek, 2002], ce dernier anticipant déjà l'incroyable augmentation du nombre de degrés de liberté des systèmes futurs.

Pour des raisons de design optique visant l'augmentation de la qualité d'observation<sup>4</sup>, les télescopes actuels sont devenus adaptatifs [Ardeberg *et al.*, 2006]. Cela veut dire que des composantes de grandes dimensions physiques font partie de leurs trains optiques s'adaptant aux déformations introduites par l'atmosphère. C'est le cas de l'*Adaptive Optics Facility* du VLT avec un miroir secondaire déformable [Arsenault *et al.*, 2006] ou du télescope à deux pupilles LBT [Riccardi *et al.*, 2004].

On est donc à nouveau à un tournant important de l'histoire du développement de l'instrumentation astronomique. Un double défi est à relever : la gestion optimale des lois de commande à la fois pour des systèmes GNDL et pour des composants adaptatifs de taille inédite.

Dans le cadre de cette thèse, ce double aspect est abordé. On adopte une formulation réductionniste consistant à découpler les deux problèmes initiaux en problèmes plus simples pour les traiter séparément.

Aborder la gestion des GNDL commence par poser la question du choix des bases de représentation mathématique, comme la base des polynômes de Zernike, série de Fourier et représentation zonale. Les calculs étant effectués par un ordinateur temps réel, plusieurs options numériques ont été suggérées. A titre d'exemple, les méthodes faisant appel aux transformées de Fourier spatiales [Poyneer *et al.*, 2002, Poyneer, 2003] et les méthodes itératives zonales avec accélération de calculs. [Gilles *et al.*, 2002, Gilles, 2003b] utilisent un pré-conditionnement multi-grille, alors que [Yang *et al.*, 2006] utilisent une approche Fourier distincte des travaux cités plus haut de Poyneer *et al.* Une approche plus récente exploite une description fractale de la phase turbulente [Béchet *et al.*, 2006]. Cependant, toutes ces méthodes ont été développées pour la reconstruction de phase en boucle ouverte. Des adaptations à la boucle fermée ont été proposées par [Gilles, 2005] et [Béchet *et al.*, 2007] mais restent sous-optimales du point de vue de la commande.

En supposant que le miroir déformable est infiniment rapide, [Le Roux, 2003] formule le problème dans le cadre de l'approche linéaire quadratique gaussienne (LQG). La commande LQG utilise le formalisme d'état des systèmes dynamiques en automatique. Cette approche permet l'estimation dynamique de la phase avec un critère de variance minimale dans des configurations boucle ouverte et boucle fermée. Elle permet de façon très commode d'isoler, grâce au théorème de séparation stochastique, l'estimation et la commande. [Petit, 2006] et [Costille, 2009] développent la solution et la valident expérimentalement pour des concepts de l'OA classique aux OA grand champ.

Cette thèse se place dans la lignée des travaux de [Le Roux, 2003], [Petit, 2006] et [Costille, 2009] réalisés par l'ONERA<sup>5</sup> et le L2TI<sup>6</sup> (Université Paris 13).

L'objectif est de proposer l'adaptation de la stratégie de commande optimale aux télescopes de type ELT. D'une part le choix des bases est révisité afin de mieux gérer les GNDL ; la commande optimale est simplifiée et adaptée à ce nouveau contexte. D'autre part, la solution optimale est étendue au cas où la dynamique des miroirs déformables ne peut pas être négligée.

Plusieurs aspects originaux sont abordés dans la perspective des très grands systèmes. En terme de gain de complexité, le point d'entrée est le choix de la base de représentation de la phase. Deux

<sup>4</sup>La réduction du nombre de surfaces réfléchissantes évite un certain nombre de complications : par exemple pertes de lumière, lumière parasite, pertes de performance dans l'infra-rouge, polarisation interne, tolérances à la stabilité mécanique et configurations d'OA [Kendrew *et al.*, 2007, Lloyd-Hart, 2000].

<sup>5</sup>Office national d'études et recherches aérospatiales.

<sup>6</sup>Laboratoire de traitement et transport de l'information.

voies d'exploration sont proposées : avec une formulation zonale, des méthodes Fourier sont étudiées en détail dans une logique de reconstruction de front d'onde ; en partant des simplifications obtenues, la commande optimale LQG est adaptée aux GNDL.

En terme de comportement des grands systèmes, ce mémoire se penche sur le problème des dynamiques temporelles des grands miroirs déformables avec des questions simples : Comment en tenir compte dans un cadre optimal ? La solution optimale est-elle intéressante du point de vue de la performance ? Ne peut-on pas simplement négliger ces dynamiques ?

Des cas illustratifs permettent de positionner les résultats sur des systèmes d'intérêt. A titre d'exemple, sont traitées les dynamiques du miroir quaternaire adaptatif, en phase de conception pour le futur ELT européen, et le double correcteur *woofer-tweeter*, un concept très en vogue à l'heure actuelle, envisagé pour plusieurs systèmes d'OA.

### 1.3 Structure du manuscrit de thèse

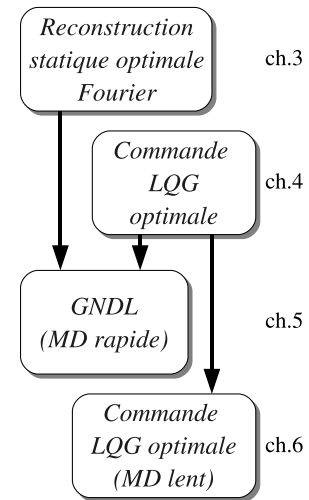
Ce manuscrit est composé de 7 chapitres dont l'introduction (ch. 1) et la conclusion (ch. 7). Le chapitre 2 est consacré à la présentation du formalisme qui sera utilisé, à la description du phénomène turbulent, à l'impact de celui-ci sur la formation des images et aux techniques d'optique adaptative mises en œuvre pour parvenir à l'atténuer. Une description des systèmes d'OA et des lois de commande développées pour les piloter est réalisée.

Le chapitre 3 présente l'étape de reconstruction statique du front d'onde, comme un problème inverse d'estimation statique. Les solutions moindres carrés et à variance minimale sont établies de manière à pouvoir les adapter au cas d'un grand nombre de degrés de liberté. L'utilisation d'une base de Fourier (dans le domaine des fréquences spatiales) est alors proposée puisque, grâce à la FFT<sup>7</sup>, les calculs sur cette base passent de l'ordre  $O(n^2)$  des algorithmes traditionnels à  $O(n \log(n))$ ,  $n$  étant le nombre de degrés de liberté.

Afin de tenir compte du caractère dynamique de la perturbation de phase, des retards de mesure et de toute l'information *a priori* dont on dispose (moments spatiaux et temporels d'ordre deux de la perturbation et bruits), une solution au problème de commande optimale est décrite au chapitre 4. Cette solution est simplifiée en vue de son application aux GNDL. Les modèles d'évolution de phase sont analysés et réinterprétés.

Le chapitre 5 intègre la commande LQG du chapitre 4 avec l'approche Fourier du chapitre 3. En suivant un raisonnement physique, une simplification des équations est proposée qui rend très creux les opérateurs intervenant dans la solution du problème. Ceci permet d'appliquer ensuite des méthodes numériques de résolution de grands systèmes linéaires. Une nouvelle méthode basée sur les gradients conjugués pré-conditionnée en Fourier est alors étudiée. La validation est faite au moyen de simulations numériques Monte Carlo.

Enfin au chapitre 6 l'hypothèse sur la rapidité infinie de la réponse des MD est relâchée. La solution générale à ce nouveau problème est établie dans le cadre de l'approche LQG du chapitre 4. La formulation proposée permet aussi de traiter de façon optimale la commande d'un système d'OA comprenant des miroirs à dynamique lente et de type *woofer-tweeter* en aboutissant à une répartition spatio-temporelle de l'effort de commande qui tient compte des caractéristiques dynamiques des composants.



<sup>7</sup> Algorithme rapide de calcul de la transformée de Fourier discrète.

## **Chapitre 2**

# **Optique adaptative pour l'astronomie**



---

**Sommaire**

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>21</b>
<b>2.2</b>	<b>Principes sur la formation d'images</b>	<b>21</b>
<b>2.3</b>	<b>Les effets optiques de la turbulence atmosphérique</b>	<b>22</b>
2.3.1	Fluctuations d'indice de réfraction	22
2.3.2	Caractérisation statistique de la phase	24
<b>2.4</b>	<b>Imagerie à travers la turbulence</b>	<b>29</b>
2.4.1	Critères de performance optique	29
2.4.2	La base des polynômes de Zernike	30
2.4.3	L'angle d'arrivée	33
<b>2.5</b>	<b>Le principe de l'optique adaptative</b>	<b>34</b>
2.5.1	Composants et modélisation classique	35
2.5.2	Chronogramme d'opérations	40
2.5.3	Les différents espaces en OA	41
<b>2.6</b>	<b>Budget d'erreurs en OA</b>	<b>42</b>
2.6.1	Erreurs dues à l'OA	43
<b>2.7</b>	<b>Différents concepts d'Optique Adaptative</b>	<b>44</b>
<b>2.8</b>	<b>Introduction à la commande en OA</b>	<b>46</b>
2.8.1	Modélisation continue des boucles de commande	46
2.8.2	Modélisation discrète des boucles de commande	47

---

## 2.1 Introduction

Ce chapitre présente les concepts et résultats principaux nécessaires à la compréhension de l'ensemble des travaux menés par la suite. On commence à la section 2.2 par les principes sur de formation d'images. Pour les télescopes au sol, les images sont acquises à travers les couches turbulentes de l'atmosphère terrestre. L'étude du comportement de la turbulence est par conséquent nécessaire, car celle-ci impacte les images. On présente donc les effets optiques de la turbulence à la section 2.3 puis la caractérisation statistique du phénomène turbulent.

La modélisation du problème d'imagerie effectuée à travers la turbulence est présentée à la section 2.4, suivie de la présentation des systèmes d'optique adaptative (OA) visant la compensation des effets turbulents à la section 2.5. Ce chapitre d'introduction se finit par un exposé général des limitations physiques et technologiques propres à l'OA [§2.6] et par les principes de commande classiquement utilisés dans la mise en œuvre de ces systèmes sur des bancs expérimentaux et télescopes optiques [§2.8].

## 2.2 Principes sur la formation d'images

La théorie de la diffraction décrit le processus de formation d'images. Dans le cas où le processus est linéaire et invariant par translation, il peut alors être modélisé par le produit de convolution de l'objet observé  $o$  et de la réponse impulsionnelle théorique de l'instrument utilisé :

$$i(\vec{\xi}) = h(\vec{\xi}) \star o(\vec{\xi}), \quad (2.1)$$

où  $i(\vec{\xi})$  est l'image obtenue au foyer du système optique et  $\star$  représente la convolution des deux fonctions définie par

$$f(\vec{\xi}) \star g(\vec{\xi}) = \int f(\vec{\xi}) g(\vec{\alpha} - \vec{\xi}) d\vec{\alpha}. \quad (2.2)$$

La réponse impulsionnelle d'un instrument est appelée la Fonction d'Etalement de Point (FEP). Concrètement, en lumière incohérente, la FEP est le module carré de l'amplitude du champ électromagnétique diffracté généré par une ouverture optique en imageant un objet  $o$  ponctuel et monochromatique. Elle est égale au module carré de la transformée de Fourier de l'amplitude complexe  $\psi$  du champ scalaire électromagnétique dans la pupille  $\Omega$  de l'instrument, soit

$$\text{FEP}(\vec{\xi}) \propto |\mathcal{F}^{-1}\{\psi(\vec{r})\Omega(\vec{r})\}|^2, \quad (2.3)$$

où la pupille  $\Omega$  est définie par

$$\Omega(\vec{r}) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \in [oc, D/2]; \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (2.4)$$

avec  $\vec{r}$  un vecteur de distances dans le plan. Le scalaire  $oc$  est le rayon de l'occultation centrale du télescope de diamètre  $D$ . Le champ dans la pupille se calcule directement par la relation  $\psi = A\Omega e^{i\phi}$ , où  $A$  est l'amplitude et  $\phi$  la phase du champ électromagnétique dans la pupille  $\Omega$ .

Dans le cas d'un système optique parfait, l'amplitude complexe provenant d'une source ponctuelle à l'infini est constante et peut être prise égale à 1 sur toute la pupille, la phase  $\phi$  est constante. L'image étant limitée par la diffraction du télescope, la réponse de l'instrument est alors le module carré de

la transformée de Fourier de la fonction pupille. Dans le cas d'une pupille circulaire sans occultation centrale (*i.e.*  $oc = 0$ ), la FEP est une tache d'Airy, définie par

$$\text{Airy}(\vec{\xi}) = \frac{\pi D^2}{4\lambda^2} \left| \frac{2J_1(\pi D\xi/\lambda)}{\pi D\xi/\lambda} \right|^2. \quad (2.5)$$

où  $J_1$  est une fonction de Bessel d'ordre 1 et  $\lambda$  est la longueur d'onde d'observation [Papoulis, 1975]. Le modèle de formation d'image précédent permet de représenter la répartition continue d'intensité lumineuse dans le plan focal du détecteur.

La Fig. 2.1 montre la FEP bidimensionnelle d'un instrument parfait et une coupe radiale de cette fonction

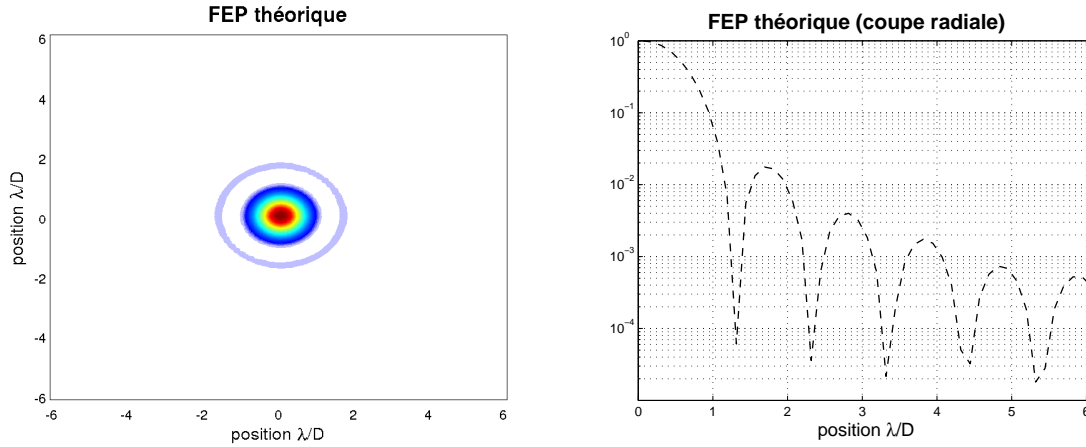


FIG. 2.1 – FEP théoriques. Gauche : FEP bidimensionnelle. Droite : coupe radiale.

La convolution de l'Eq. (2.1) devient dans l'espace de Fourier une multiplication

$$\mathbf{i}(\vec{\nu}) = \mathbf{h}(\vec{\nu}) \circ \mathbf{o}(\vec{\nu}), \quad (2.6)$$

où  $\vec{\nu}$  est un vecteur de fréquences spatiales et  $\mathbf{h}$  la fonction de transfert optique (FTO).

La FTO présente une coupure à  $D/\lambda$ . Une définition qui lui est liée est celle de la résolution d'un système optique. Dans la limite de diffraction, la résolution peut être définie par

$$\mathcal{R} = \frac{\lambda}{D}, \quad (2.7)$$

c'est-à-dire par l'inverse de la fréquence de coupure de la FTO. Plus la pupille est grande, plus le pouvoir de distinguer deux points à l'infini augmente.

## 2.3 Les effets optiques de la turbulence atmosphérique

### 2.3.1 Fluctuations d'indice de réfraction

Le déplacement de masses d'air dans le volume atmosphérique engendre des mouvements tourbillonnaires. Par conséquent, le mélange de masses à des températures hétérogènes engendre des variations locales d'indice de réfraction, notées  $\Delta_n$ , valeur dont dépend la vitesse de propagation de

la lumière. Les variations d'indice le long du trajet optique déphasent tout rayon par rapport à ses voisins. Ceci conduit à la déformation progressive du front d'onde collecté : initialement plan pour un objet à l'infini, il se bosselle peu à peu. Les variations de phase correspondantes rendent la pupille partiellement incohérente. La figure de diffraction est modifiée : des tavelures apparaissent, animées de mouvements aléatoires.

Le phénomène de la turbulence intrigue les scientifiques depuis des siècles. Une vision artistique est proposée par Leonardo da Vinci sur la Fig. 2.2, qui semble être le premier à l'avoir abordée de façon méthodologique.



FIG. 2.2 – Le phénomène turbulent comme l’imagina Leonardo da Vinci.

Au cours du XX<sup>ème</sup> siècle, les travaux de [Kolmogorov, 1941a, Kolmogorov, 1941b] proposent une approche scientifique du phénomène turbulent. Basé sur les idées de Lewis F. Richardson à l’origine d’une vision en cascades de dissipation d’énergie, un modèle mathématique est enfin proposé pour la turbulence atmosphérique.

Pour les travaux menés dans le cadre de cette thèse, la densité spectrale de puissance est le paramètre pertinent. Elle se pose sous la forme

$$\mathbf{W}_{\Delta_n}^{Kol}(\vec{\nu}, h) \approx 0,033(2\pi)^{2/3} C_n^2(h) \nu^{-11/3}, \quad (2.8)$$

où  $C_n^2(h)$  est la constante de structure en fonction de l’altitude pour une couche à l’altitude  $h$ .

Cependant, ce spectre diverge à la fréquence nulle. Un modèle qui prend en compte les échelles interne  $l_0$  et externe  $L_0$  de la turbulence est celui de Théodor von Kármán [Kármán, 1948]. L’expression du spectre s’écrit alors

$$\mathbf{W}_{\Delta_n}^{Kar}(\vec{\nu}, h) \approx 0,033(2\pi)^{-2/3} C_n^2(h) \left( \left( \frac{1}{L_0} \right)^2 + \nu^2 \right)^{-11/6} e^{-(\nu l_0)^2}. \quad (2.9)$$

### 2.3.1.1 Répartition en altitude - profil de $C_n^2(h)$

La constante de structure caractérise la force de la turbulence en fonction de l'altitude  $h$ . Elle évolue au cours du temps et dépend de nombre de paramètres (comme par exemple météorologiques ou topographiques). Les mesures de  $C_n^2$  font apparaître une propriété générale : la turbulence est essentiellement localisée dans certaines couches. Ainsi les couches situées près du sol présentent une turbulence toujours très forte. D'autres couches principales se distinguent en général, et ce jusqu'à environ 15 à 20 km d'altitude. La Fig. 2.3 présente le profil de  $C_n^2(h)$  à Cerro Paranal.

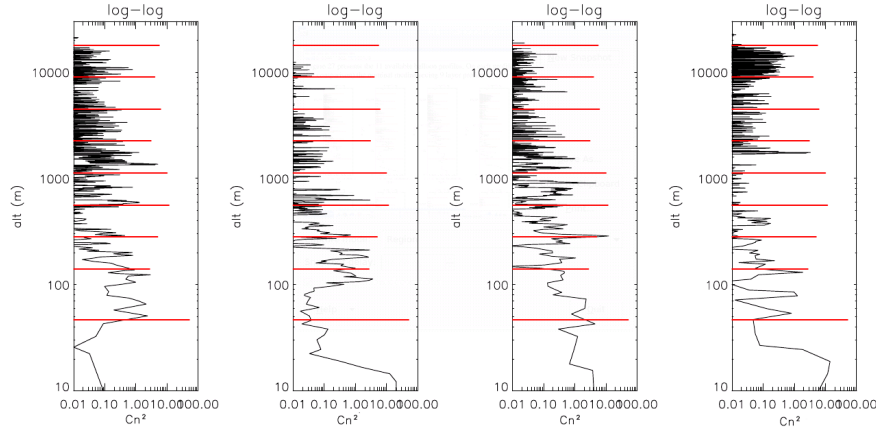


FIG. 2.3 – Profil de  $C_n^2$  en fonction de l'altitude à Paranal. Les traits rouges représentent l'approximation par couches discrètes. Images gracieusement fournies par Miska Le Louarn.

Ce type de profil distribué conduit à considérer la turbulence comme une succession de couches turbulentes discrètes et indépendantes, dont l'épaisseur est négligeable [Roddier, 1981]. Cette approximation sera utilisée dans toute la suite de ce mémoire.

### 2.3.1.2 Propriétés générales des fluctuations d'indice

L'atmosphère est supposée à la fois

**Isotrope** : Du grec *iso* (égal) + *tropos* (direction) : les paramètres statistiques de la turbulence sont indépendants de la direction. Autrement dit, la turbulence est invariante par rapport à une rotation et/ou réflexion du système de coordonnées.

**Stationnaire** : Les propriétés statistiques de la turbulence sont invariantes sous une translation dans l'espace ou dans le temps.

Cependant, les deux définitions précédentes ne représentent que des approximations du vrai phénomène turbulent.

### 2.3.2 Caractérisation statistique de la phase

Jusqu'ici on s'est intéressé à la traduction du phénomène turbulent en terme de fluctuations tridimensionnelles d'indice de réfraction. Cette section analyse les effets des fluctuations d'indice sur la propagation d'une onde plane, plus précisément la phase du front d'onde. Des déviations au plan de référence impactent les images acquises et dégradent la FEP et la résolution du système optique.

### 2.3.2.1 Fluctuations de la phase

Comme suggéré dans la section 2.3.1, on considère la turbulence atmosphérique comme une succession de couches minces localisées. Pour comprendre l'effet de la turbulence sur la formation d'images, il est nécessaire d'analyser l'effet des fluctuations de l'indice de réfraction.

Par la relation entre la phase et la variation du chemin optique

$$\phi(\vec{r}, h) = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta_n(\vec{r}, h) \delta h, \quad (2.10)$$

un front d'onde plan qui traverse une couche d'épaisseur  $\delta h$  est alors affecté d'une fluctuation de sa phase.

[Roddier, 1981] montre que pour des observations astronomiques, les effets de diffraction amenant à des défauts d'amplitude sont négligeables. On ne considère alors que des effets de phase, subis au long de la propagation au travers  $n_c$  couches turbulentes, d'où résulte

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n_c} \phi(\vec{r}, h_i). \quad (2.11)$$

### 2.3.2.2 Statistiques spatiales

**2.3.2.2.1 Fonction de structure** La fonction de structure de la phase est donnée par

$$D_\phi(\rho, \theta) = D_\phi(\rho) = \left\langle [\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r} + \rho)]^2 \right\rangle, \quad (2.12)$$

où la dépendance angulaire est absente, car la turbulence est supposée isotrope et stationnaire.

La fonction de structure peut aussi s'écrire

$$\begin{aligned} D_\phi(\rho) &= \langle |\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r} + \rho)|^2 \rangle \\ &= 2 [\langle \phi(\vec{r}) \phi(\vec{r}) \rangle - \langle \phi(\vec{r}) \phi(\vec{r} + \rho) \rangle]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Le théorème de Wiener-Khinchin permet d'obtenir

$$D_\phi(\rho) = 2 \int \mathbf{W}_\phi(\vec{\nu}) \left(1 - e^{-2\pi i \vec{\nu} \cdot \rho}\right) \partial \vec{\nu}, \quad (2.14)$$

où  $\mathbf{W}_\phi(\vec{\nu})$  est la DSP de la phase. La notation  $\vec{\nu} = [\nu_x, \nu_y]$  et  $\nu = |\vec{\nu}|$  est adoptée.

**2.3.2.2.2 von Kármán** Théodor von Kármán a introduit de légères modifications au spectre de Kolmogorov pour tenir compte des effets des échelles externe  $L_0$  et interne  $l_0$  de la turbulence. La DSP de von Kármán est donnée par

$$\mathbf{W}_\phi^{K\acute{a}r}(\vec{\nu}) \approx 0.023 \left(\frac{1}{r_0}\right)^{5/3} \left(\nu^2 + \frac{1}{L_0^2}\right)^{-11/6} e^{-(\nu l_0)^2}, \quad \text{Spectre de puissance de von Kármán}$$

(2.15)

où  $L_0$  est l'échelle externe de la turbulence,  $l_0$  l'échelle interne et  $r_0$  le paramètre de Fried défini par

$$r_0 \triangleq \left(0,42 \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{\cos \gamma} \int_0^\infty C_n^2(h) dh\right)^{5/3}, \quad (2.16)$$

où  $\gamma$  est l'angle zénithal. La paramètre de Fried correspond approximativement à la distance pour laquelle l'erreur quadratique de front d'onde est équivalente à  $1\text{rd}^2$  [Roddier, 1999]. Le paramètre de Fried intervient aussi au niveau de la résolution maximale d'un télescope en présence de turbulence. Le *seeing*, qui retranscrit cette notion, est donné par

$$\text{seeing} = \frac{\lambda}{r_0}. \quad (2.17)$$

Valeurs typiques de  $L_0$  varient entre les dizaines et les centaines de mètres alors que  $r_0 \approx 0,5\mu\text{m}$  (mesuré pour  $\lambda = 0,5\mu\text{m}$ ) et de l'ordre de 10 cm à Paranal au Chili, pour un *seeing* de  $\approx 0,85$  arcsecondes.

La fonction de structure obtenue à partir de cette DSP est donnée par [Conan, 2000]

$$D_\phi(\vec{\rho}) = \left(\frac{L_0}{r_0}\right)^{5/3} \times \frac{2^{1/6}\Gamma(11/6)}{\pi^{8/3}} \left[\frac{24}{5}\Gamma\left(\frac{6}{5}\right)\right] \left[\frac{\Gamma(5/6)}{2^{1/6}} - \left(\frac{2\pi\rho}{L_0}\right)^{5/6} K_{5/6}\left(\frac{2\pi\rho}{L_0}\right)\right], \quad (2.18)$$

avec  $\Gamma$  la fonction « gamma » et  $K_{5/6}$  la fonction de Bessel modifiée du troisième type.

A partir de l'Eq. (2.12), la fonction de structure peut également se poser sous la forme

$$D_\phi(\vec{\rho}) = 2\mathcal{C}_\phi(0) - 2\mathcal{C}_\phi(\vec{\rho}), \quad (2.19)$$

où  $\mathcal{C}_\phi(\vec{\rho})$  est la covariance spatiale de la phase.

D'après (2.18) la fonction de covariance de la phase  $\mathcal{C}_\phi(\vec{\rho}) = \langle \phi(\vec{r} + \vec{\rho})\phi(\vec{r}) \rangle$  en fonction de la distance  $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$  est donnée par

$$\mathcal{C}_\phi(\vec{\rho}) = \left(\frac{L_0}{r_0}\right)^{5/3} \times \frac{\Gamma(11/6)}{2^{5/6}\pi^{8/3}} \left[\frac{24}{5}\Gamma\left(\frac{6}{5}\right)\right] \left(\frac{2\pi\rho}{L_0}\right)^{5/6} K_{5/6}\left(\frac{2\pi\rho}{L_0}\right). \quad (2.20)$$

La Fig. 2.4 présente les valeurs de l'Eq. (2.20) pour différents échelles externes. Une remarque curieuse, la largeur à mi-hauteur de  $\mathcal{C}_\phi(\rho) \approx L_0/3$  pour tous les cas testés.

**2.3.2.2.3 Kolmogorov** Le spectre de puissance de la phase est donné par

$$\boxed{\mathbf{W}_\phi(\vec{\nu}) \approx 0,023 \left(\frac{1}{r_0}\right)^{5/3} \nu^{-11/3}, \quad \text{Spectre de puissance de Kolmogorov}} \quad (2.21)$$

où le paramètre de Fried  $r_0$  est défini à l'Eq. (2.16). Cette loi se déduit de celle de l'Eq. (2.15) en prenant  $L_0 = \infty$  et  $l_0 = 0$ .

Clairement, pour un spectre de Kolmogorov, l'intégrale de l'Eq. (2.21) ne peut pas se calculer car  $\int \mathbf{W}_\phi(\vec{\nu}) d\vec{\nu} = \infty$ .

Cependant la fonction de structure peut se calculer.  $\mathbf{W}_\phi(\vec{\nu})$  étant une fonction à symétrie de révolution, un changement en coordonnées polaires permet d'écrire

$$D_\phi(\rho) = 2C \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \nu^{-11/3} (1 - \cos(-2\pi i \nu \rho \cos(\theta))) \nu d\theta d\nu, \quad (2.22)$$

où  $C$  est une constante. En prenant

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\rho \cos \theta) d\theta, \quad (2.23)$$



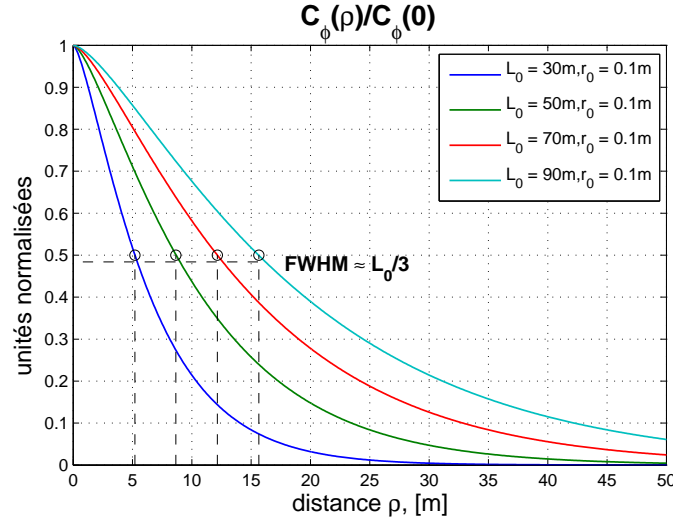


FIG. 2.4 – Comportement de la fonction de covariance spatiale de la phase en fonction de la distance  $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ . Remarquablement, la largeur à mi-hauteur (FWHM) est d'environ  $L_0/3$  pour tous les cas testés.

il vient finalement [Gradstein et Ryshik, 1981]

$$D_\phi(\rho) = 2C2\pi \int_0^\infty \nu^{-8/3} (1 - J_0(2\pi i\nu\rho)) d\nu. \quad (2.24)$$

La fonction de structure s'obtient à partir des calculs du paragraphe 2.3.2.2.1 comme

$$D_\phi(\rho) \approx 6.88 \left( \frac{\rho}{r_0} \right)^{5/3}. \quad (2.25)$$

### 2.3.2.3 Statistiques temporelles

Sous l'hypothèse de Taylor [Taylor, 1938], pour une couche donnée à l'altitude  $h$ , les défauts de phase se déplacent à vitesse de vent constante en translation. On peut alors écrire

$$\phi(\vec{r}, t + \tau) = \phi(\vec{r} - \tau\vec{V}, t), \quad (2.26)$$

où  $V = |\vec{V}|$ . L'interprétation physique est que la phase à un instant  $t + \tau$  est équivalent à la phase déplacée de  $\tau\vec{V}$ .

Sous cette hypothèse, [Roddier et al., 1993] et [Conan et al., 1995] montrent que le spectre spatial d'une composante de la phase sous la forme

$$m(\vec{r}) = M(\vec{r}) \star \phi(\vec{r}), \quad (2.27)$$

s'écrit

$$\mathbf{W}_M(\vec{\nu}, h) = |\mathbf{M}(\vec{\nu}, h)|^2 \mathbf{W}_\phi(\vec{\nu}, h), \quad (2.28)$$



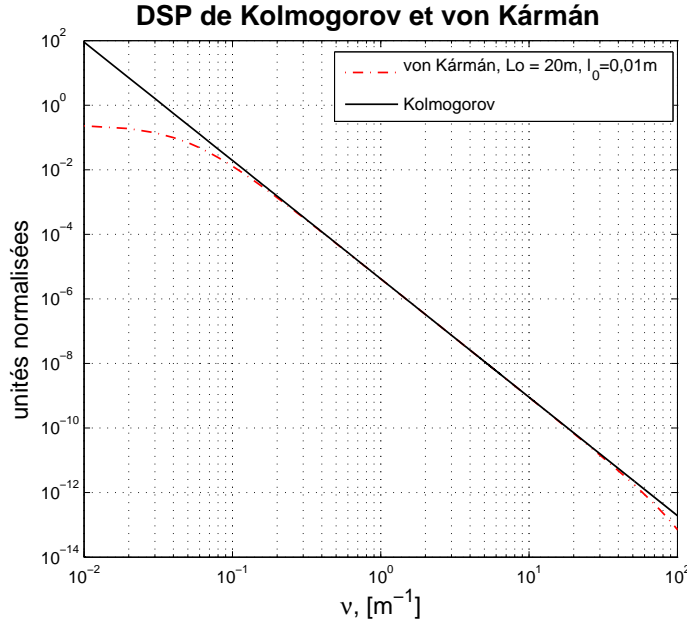


FIG. 2.5 – DSP des modèles de von Kármán et Kolmogorov.

où  $\mathbf{M}(\vec{\nu})$  est la transformée de Fourier de la fonction spatiale  $M(\vec{r})$ .

En s'appuyant sur l'hypothèse de Taylor, la densité spectrale de puissance temporelle (monodimensionnelle) peut se calculer à partir de la densité spectrale de puissance spatiale (bidimensionnelle) en prenant

$$\mathbf{W}_M^t(f, h) = \frac{1}{V(h)} \int \mathbf{W}_M \left( \frac{f}{V(h)}, \nu_y \right) d\nu_y, \quad (2.29)$$

où  $f$  est la fréquence temporelle (en Hertz) et  $V(h)$  est le module vitesse de vent en fonction de l'altitude, supposé aligné avec l'axe des 'x' dans un repère  $xOy$ .

Finalement, en intégrant sur l'altitude

$$\mathbf{W}_M^t(f) = \int_0^{h_{max}} \mathbf{W}_M^t(f, h) \delta h \quad (2.30)$$

la DSP temporelle globale est obtenue.

Cette expression est intensivement utilisée aux chapitres 4, 5 et 6 afin d'obtenir des modèles d'évolution temporelle de la phase pour une décomposition modale de la phase sur les polynômes de Zernike. Pour ce cas, les fonctions  $M(\vec{r})$  correspondent dans ce cas aux polynômes de Zernike.

#### 2.3.2.4 Perturbations optiques d'origine mécanique

Le diamètre des télescopes croissant, la structure mécanique devient par conséquent de plus grandes dimensions. Ceci soulève des problèmes de stabilité aux vibrations incitées par le vent sur la structure mécanique du télescope.

La rigidité de la structure du télescope tend à concentrer cet impact sur les bas ordres optiques, notamment le TT [Sedghi, 2007]. Ce phénomène a comme conséquence néfaste une composante optique importante qui viendra s'ajouter aux perturbations purement atmosphériques. La Fig. 2.6

compare deux types de DSP issues de perturbations d'origines diverses. En noir, le spectre du TT obtenu par combinaison linéaire de spectres en altitude dans la direction perpendiculaire et parallèle au vecteur vitesse de vent, selon la méthode détaillée à la section 2.3.2.3. Les conditions de simulation sont décrites dans la légende de la Fig. 2.6. En rouge, l'allure de la DSP de la perturbation mécanique issue d'un modèle à éléments finis réalisé à l'ESO dans le cadre des études de conception de l'E-ELT. Le rapport élevé entre la variance des perturbations atmosphériques et mécaniques est très clairement visible. Ce rapport peut atteindre trois ordres de magnitude (en fonction des paramètres pris pour le TT atmosphérique, notamment l'échelle externe  $L_0$ ), ce qui souligne l'importance d'une commande optimale pour obtenir une atténuation plus efficace.

A noter la ressemblance du spectre mécanique avec le spectre atmosphérique, notamment aux basses fréquences.

Le tilt d'origine mécanique est traité au chapitre 6 dans le cadre de la commande optimale avec dynamique miroir pour le miroir pré-focal M4 du futur E-ELT et le système à double correcteur *woofer-tweeter*.

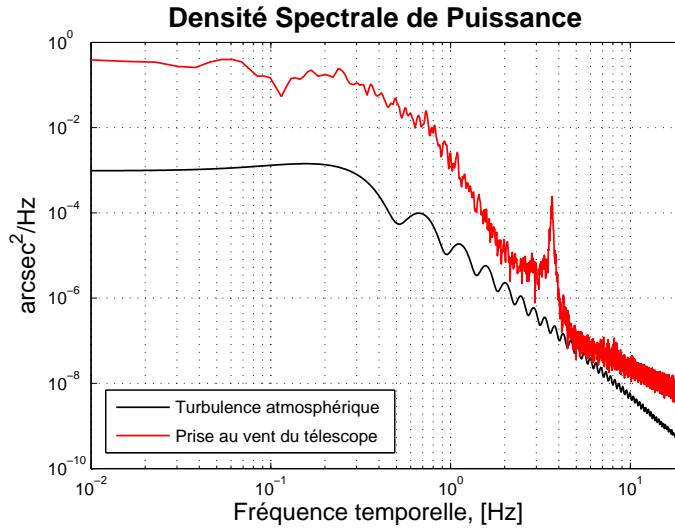


FIG. 2.6 – DSP de l'angle d'arrivée (AA), avec  $M(\vec{\nu}) = 2i\pi\vec{\nu}\mathcal{F}\{\Omega\}$ ,  $D = 42\text{m}$ ,  $L_0 = 50\text{m}$ ,  $l_0 = 0\text{m}$ ,  $seeing = 1,0 \text{ arcsec}@0,5\mu\text{m}$ ,  $r_0 \approx 0,1\text{m}$ , avec trois couches en altitude de poids relatifs  $\{0,67; 0,22; 0,11\}$ ,  $V=12,5\text{m/s}$  et directions  $\theta_i = \{0^\circ; 45^\circ; 90^\circ\}$ . L'AA d'origine mécanique (prise au vent du télescope) est issu de simulations d'éléments finis réalisé par l'ESO, avec  $\approx 280 \text{ mas rms}$  de perturbation totale. Le rapport des perturbations est de  $\approx 164$  en valeurs rms.

## 2.4 Imagerie à travers la turbulence

### 2.4.1 Critères de performance optique

Plusieurs critères de performance optique peuvent être définis ayant pour base la FEP. Le rapport de Strehl est défini par

$$SR \triangleq \frac{FEP(0)}{\text{Airy}(0)}, \quad (2.31)$$

étant le rapport du pic central de la FEP de l'image corrigée par OA par celui de l'image théorique limitée par la diffraction.

D'autres critères basés sur la FEP peuvent être définis, tels la largeur à mi-hauteur ou l'énergie encerclée. Cependant, ces définitions ne sont pas utilisées dans ce mémoire.

Une métrique d'intérêt est l'énergie cohérente donnée par

$$\mathbf{E}_c = e^{-\sigma_{\text{res}}^2}, \quad (2.32)$$

(avec  $\sigma_{\text{res}}^2$  en  $\text{rd}^2$ ) car elle approxime le rapport de Strehl (approximation de Maréchal) [J.W.Hardy, 1998, Ross, 2009]

$$\text{SR} \approx e^{-\sigma_{\text{res}}^2}, \quad (2.33)$$

si la variance totale des défauts de phase (en  $\text{rd}^2$ ) est petite. Le rapport de Strehl est toujours maximisé en minimisant la variance de la phase résiduelle [Herrmann, 1992]. C'est ce critère qui sera utilisé tout au long de ce mémoire.

### 2.4.2 La base des polynômes de Zernike

Les polynômes de Zernike en nombre infini forment une base mathématique orthonormale où les composantes radiale et azimutale sont séparables. Les polynômes sont définis par ( $0 \leq r \leq 1$ )

$$Z_n^m(r, \theta) = \begin{cases} \sqrt{n+1} R_n^m(r) \sqrt{2} \cos(m\theta) & \text{pour } m \neq 0, j \text{ pair;} \\ \sqrt{n+1} R_n^m(r) \sqrt{2} \sin(m\theta) & \text{pour } m \neq 0, j \text{ impair;} \\ \sqrt{n+1} R_n^0(r) \sqrt{2} & \text{pour } m = 0; \end{cases} \quad (2.34)$$

avec

$$R_n^m(r) = \sum_{k=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^k (n-k)!}{k! ((n+m)/2 - k)! ((n-m)/2 - k)!} r^{n-2k}, \quad (2.35)$$

où  $n \in \mathbb{N}$  et  $m \in \mathbb{N}$  sont les ordres radiaux et azimutaux. L'indice  $j$  est une fonction de  $m$  et  $n$ . Celle de [Noll, 1976] est adoptée. La Fig. 2.7 montre les premiers polynômes qui présentent la caractéristique sympathique d'être les aberrations optiques les plus communes.

Les transformées de Fourier des polynômes de Zernike  $\mathbf{Z}_n^m(\vec{\nu})$  sont définies par

$$\mathbf{Z}_n^m(\vec{\nu}) = \sqrt{n+1} \frac{J_{n+1}(2\pi D\nu)}{\pi D\nu} \begin{cases} (-1)^{(n+m)/2} i^m \sqrt{2} \cos(m\theta) & \text{pour } m \neq 0, j \text{ pair;} \\ (-1)^{(n-m)/2} i^m \sqrt{2} \sin(m\theta) & \text{pour } m \neq 0, j \text{ impair;} \\ (-1)^{n/2} & \text{pour } m = 0; \end{cases} \quad (2.36)$$

La DSP temporelle des polynômes de Zernike se calcule immédiatement à partir de l'Eq. (2.28) en prenant  $|\mathbf{M}|^2 = |\mathbf{Z}_n^m(\vec{\nu})|^2$ .

Noll dérive aussi la matrice de covariance spatiale des polynômes de Zernike pour une turbulence de type Kolmogorov. [Conan, 2000] généralise ce même résultat pour une turbulence de von Kármán.

#### 2.4.2.1 Modélisation avec la base de polynômes de Zernike

**2.4.2.1.1 Génération d'écrans de phase** Les écrans de phase turbulents sont simulés suivant la méthode de [McGlamery, 1976]. Cette méthode consiste à faire des tirages aléatoires

$$\phi_i(x, y) = \text{Re} \left\{ \mathbf{TF}^{-1} \left\{ \sqrt{\mathbf{W}_\phi(\vec{\nu})} \cdot \sqrt{w(\vec{\nu})} \right\} \right\}, \quad (2.37)$$

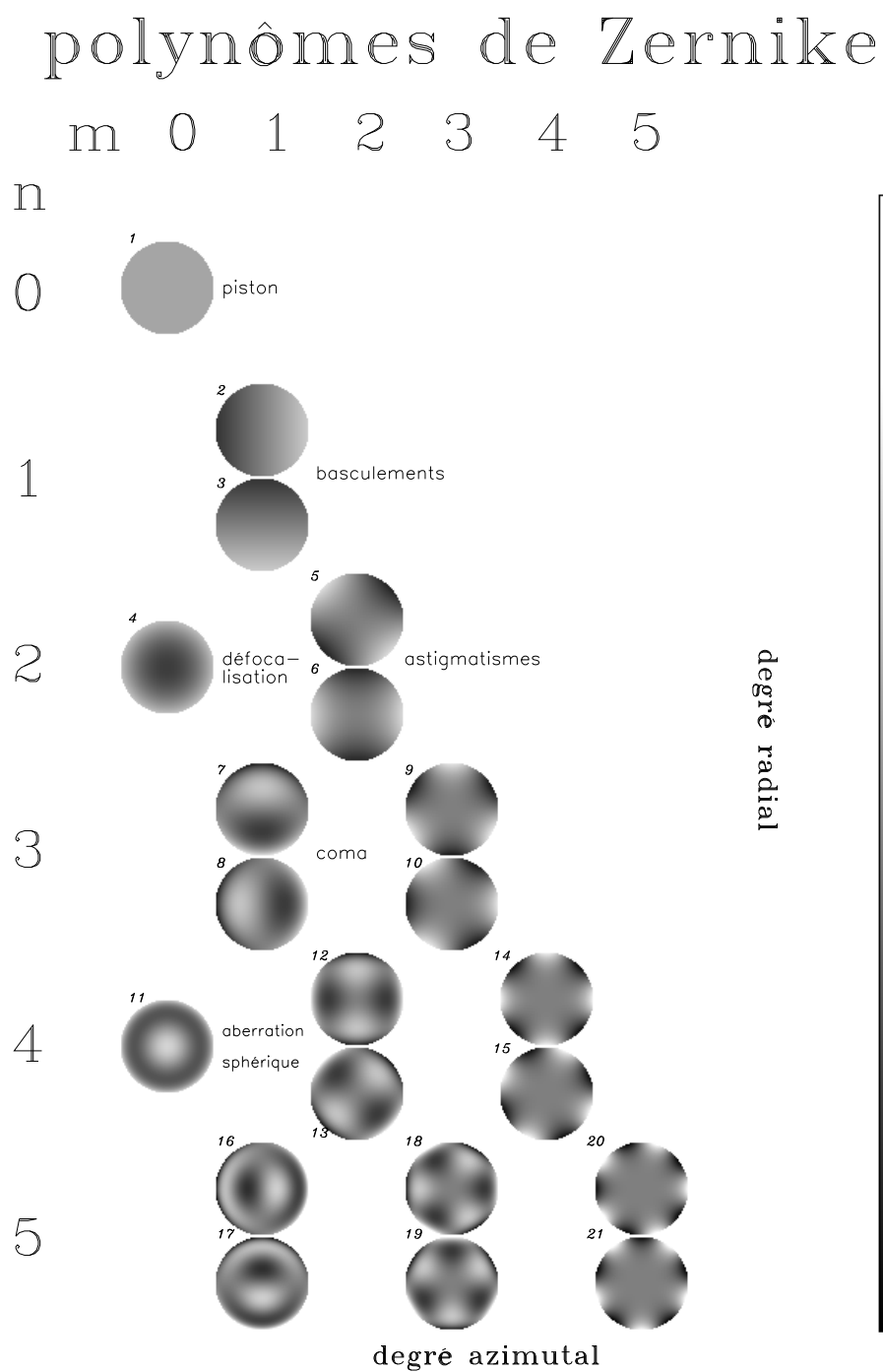


FIG. 2.7 – Représentation bidimensionnelle des premiers polynômes de Zernike.

où  $w(\vec{r})$  est un bruit blanc, gaussien de matrice de covariance égale à l'identité,  $\Sigma_w = I$ .

La méthode de McGlamery introduit une échelle externe fictive  $L_0^{fictive} \approx L/2$ , avec  $L$  la longueur en mètres de l'écran de phase. Pour pallier à cet effet, [Lane *et al.*, 1992] propose de rajouter des harmoniques correspondant aux fréquences inférieures à  $1/D$ . La fonction de structure est ainsi mieux représentée. [Roddier, 1990] propose une méthode inspirée de celle de McGlamery, en faisant des tirages aléatoires à partir de la matrice de covariance des polynômes de Zernike. Un inconvénient est que les écrans de phase sont par construction à support circulaire.

Une méthode rapide proposée par [Harding *et al.*, 1999] s'appuie sur la nature fractale de la turbulence [Schwartz *et al.*, 1994]. A la base est l'algorithme de *mid-point* où des tirages aléatoires sont effectués pour différentes résolutions spatiales jusqu'à ce que une résolution suffisamment fine soit obtenue.

Une méthode permettant de simuler des écrans de phase non stationnaires infiniment longs a été proposée par [Assémat *et al.*, 2006] puis généralisée par [Beghi *et al.*, 2008d]. Cette méthode consiste à rajouter successivement des colonnes générées de façon à garantir une covariance de phase [Eq. (2.20)] correcte.

En pratique les polynômes de Zernike sont définis sur une grille discrétisée de points. Afin d'éviter la perte d'orthonormalisation suite à l'utilisation d'un échantillonnage spatial, la matrice suivante doit être calculée

$$Z_{ortho}(i, j) = \frac{1}{S_\Omega} \sum_{r < R} \sum_{0 \leq \theta \leq 2\pi} Z_i(r/R, \theta) Z_j(r/R, \theta) r \Delta r \Delta \theta. \quad (2.38)$$

Avec l'inverse de celle-ci, les coefficients de la décomposition sur la base des polynômes de Zernike sont réorthonormalisés [Fusco, 2000].

**Exemple :** Génération d'écrans de phase à partir du spectre de puissance spatiale de von Kármán selon la méthode de McGlamery.

La Fig. 2.8 montre la variance théorique des polynômes de Zernike pour un spectre de Kolmogorov et von Kármán. Une atténuation des basses fréquences (*cf.* Fig. 2.5) donne lieu à une variance moins importante sur tous les modes, plus visiblement sur les modes de tip/tilt. La simulation numérique s'ajuste bien à la théorie, si l'on tient compte l'échelle externe fictive.

**2.4.2.1.2 Coefficients des polynômes de Zernike et erreur de front d'onde** En général, l'erreur de front d'onde est donnée par (en  $\text{rd}^2$  de phase)

$$\epsilon_{\phi, J}^2 = \left\langle \frac{4}{\pi D^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \left( \phi - \sum_{j=1}^J a_j Z_j \right)^2 r \partial r \partial \theta \right\rangle, \quad (2.39)$$

où la moyenne de chaque mode  $\langle a_i \rangle = 0$ .

Puisque les polynômes de Zernike sont orthogonaux

$$\frac{1}{S_\Omega} \int_{S_\Omega} Z_j(r/R, \theta) \cdot Z_j(r/R, \theta) r \partial r \partial \theta = 1, \forall i = j > 0, \quad (2.40)$$

et normalisés

$$\frac{4}{\pi D^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} Z_j(r/R, \theta)^2 r \partial r \partial \theta = 1, \quad (2.41)$$

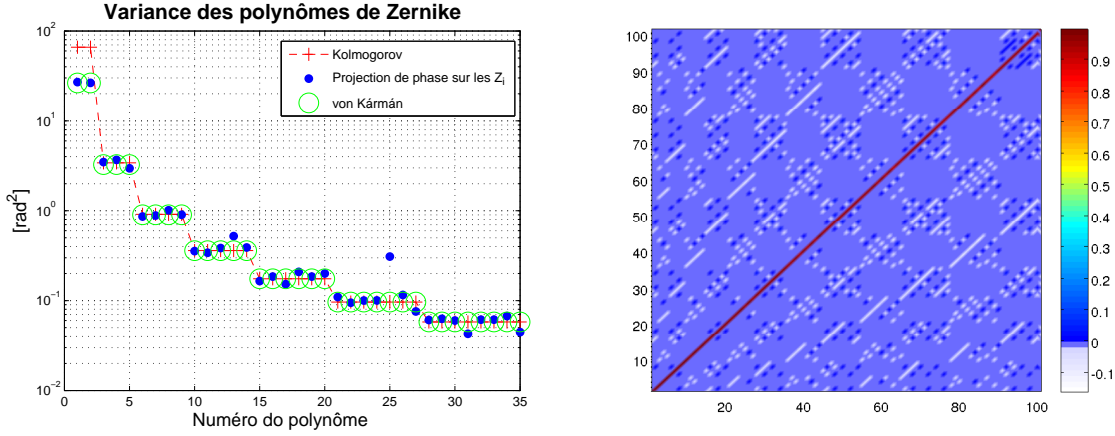


FIG. 2.8 – Gauche : variance des modes de Zernike, théorique et simulée à partir de 100 tirages aléatoires selon la méthode de de McGlamery. Paramètres :  $L_0 = 25$  m,  $D = 2$  m,  $r_0 = 0,1$  m ; Droite : matrice de réorthogonalisation des modes de Zernike [Eq. (2.38)]. Les variances sont moyennées sur 100 tirages avec  $L \geq 2L_0$ .

donc, d'après [Noll, 1976]

$$\epsilon_{\phi,J}^2 = \langle \phi^2 \rangle - \sum_{j=2}^J \langle |a_j|^2 \rangle. \quad (2.42)$$

La variance  $\langle \phi^2 \rangle$  correspond à la phase « dépistonnée », c'est-à-dire, après élimination de la moyenne sur la pupille. Ainsi, la variance  $\langle |a_j|^2 \rangle$  des polynômes de Zernike avec coefficients  $a_j$  est directement la variance en terme d'erreur de front d'onde.

### 2.4.3 L'angle d'arrivée

L'angle d'arrivée correspond à l'angle de la phase bidimensionnelle sur la pupille du télescope. La Fig. 2.9 illustre le principe et la distinction par rapport aux polynômes de Zernike  $Z_2$  et  $Z_3$  (le tip/tilt) pour une coupe monodimensionnelle. Les TT de Zernike sont le plan moyen (au sens moindres carrés) qui intersecte la phase. Tous les modes avec fréquence azimutale  $m = 1$  contribuent à l'angle d'arrivée [Brummelaar, 1995].

La DSP spatiale est donnée par

$$\mathbf{W}(\vec{\nu}) = |\mathbf{M}(\vec{\nu})|^2 \mathbf{W}_\phi(\vec{\nu}), \quad (2.43)$$

où, pour une pupille circulaire de rayon  $D$ ,

$$\mathbf{M}(\nu) = 2\pi i \nu \frac{2J_1(\pi D \nu)}{\pi D \nu}. \quad (2.44)$$

L'obtention de ce mode se fait de façon très simple en prenant la moyenne des gradients de phase. En plus, couramment des miroirs de basculement peuvent être mis en place pour corriger le AA. La correction de ce mode sera particularisé au chapitre 6 où la dynamique de ce composant est prise en compte.

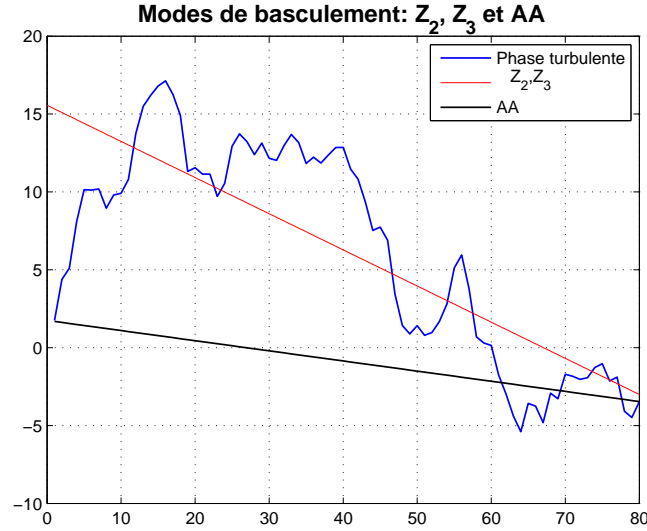


FIG. 2.9 – Illustration des types de modes de basculement (monodimensionnel) le tip/tilt correspondant aux modes  $Z_2$ ,  $Z_3$  et l'angle d'arrivée (AA). Les premiers s'ajustent à la phase au sens moindres carrés alors que l'AA est la pente de l'ensemble, donc la différence de la phase aux extrémités.

#### 2.4.3.1 Angle d'arrivée et modes tip/tilt de Zernike

Pour les modes tip/tilt, la variance totale peut aussi s'écrire en terme de l'angle d'arrivée. Celui-ci, on le souligne car cela prête à confusion, n'est pas l'angle d'arrivée du front d'onde turbulent, mais tout simplement l'angle du TT, converti de  $\text{rd}^2$  de phase en  $\text{rd}^2$  d'angle équivalent.

La différence de phase aux bords de la pupille est donnée par

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta\delta \quad (2.45)$$

où  $\delta$  est ici le déplacement aux bords. Puisque  $\Delta\delta = D\alpha$ , l'angle équivalent des  $Z_2$  et  $Z_3$  est tout simplement  $\alpha = 4a_{2,3}$  (voir la définition des TT de Zernike à la section 2.4.2).

## 2.5 Le principe de l'optique adaptative

Depuis près de quatre siècles, tous les instruments mis au point pour scruter l'univers souffrent du même mal, d'autant plus difficile à éliminer que le coupable est l'atmosphère terrestre.

Les moyens mis en oeuvre pour s'affranchir de la turbulence sont connus sous le nom d'optique adaptative. Concept initialement proposé par [Babcock, 1953], l'optique adaptative est une technique qui permet de corriger en temps réel les déformations évolutives d'un front d'onde grâce à un miroir déformable.

La Fig. 2.10 présente le principe : la lumière arrivant sur le télescope est bosselée par la turbulence atmosphérique : le front d'onde n'est plus plan mais irrégulier. Il est envoyé sur un miroir déformable auquel on applique des déformations inverses de celles du front d'onde de façon qu'après réflexion sur ce miroir, il redevienne à nouveau plat.

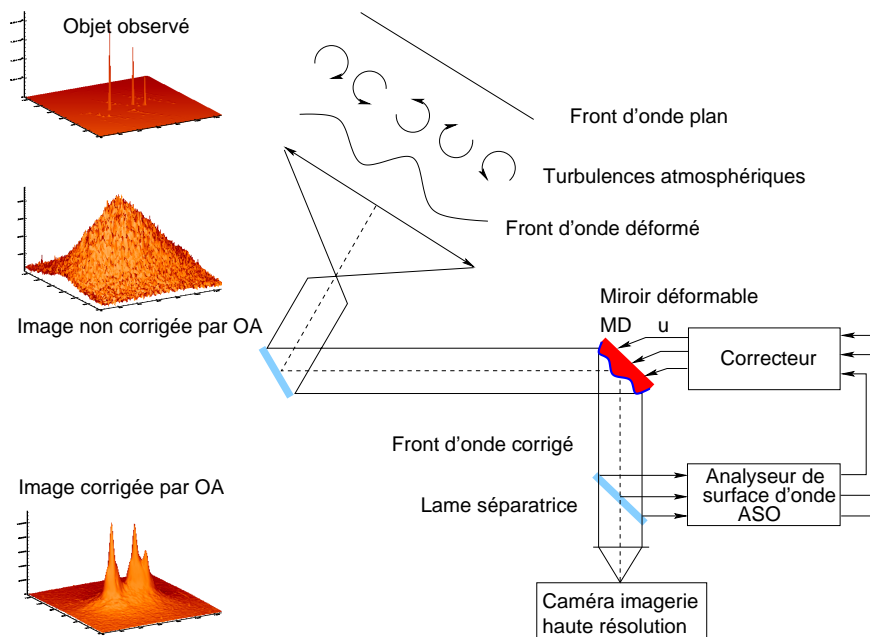


FIG. 2.10 – Principe de fonctionnement de l'optique adaptative en astronomie.

Tout le problème revient donc à savoir quelles déformations il faut appliquer au miroir. Puisque les déformations doivent être inverses de celles du front d'onde, elles s'obtiendront donc en analysant ce front d'onde. A cette fin, une petite partie de lumière est prélevée à l'aide d'une lame semi réfléchissante et on l'envoie sur un dispositif qui analyse la surface d'onde. Ce dernier dispositif adresse alors à un ordinateur les mesures de front d'onde et celui-ci calcule la valeur des signaux électriques à envoyer aux actionneurs du miroir pour le déformer.

Un tel système n'a été réalisable que grâce à un concours de deux circonstances essentielles : 1) existence d'une théorie intégrée de la turbulence atmosphérique 2) avancement technologique, optique, informatique et mécanique.

Ces systèmes opèrent en boucle fermée, consistant à placer un analyseur de surface d'onde derrière le miroir déformable pour mesurer le résidu après correction. Depuis les premiers systèmes d'OA COME-ON et ses successeurs COME-ON+ [Rousset *et al.*, 1990] et ADONIS [Beuzit et Hubin, 1993] installés aux télescope de 3,6m de l'observatoire européen austral (ESO) à Paranal (Chili), le système NAOS équipe les télescopes de 8,2m de l'ESO [Rousset *et al.*, 2000]. Plusieurs autres observatoires se sont aussi munis ou sont en cours de se munir de cette technologie. Les télescopes Keck, Gemini North et Subaru à Hawaii, Gemini South aussi au Chili, le LBT en Arizona et le GTC aux îles Canaries font partie de cette liste de plus en plus longue – Fig. 1.1.

### 2.5.1 Composants et modélisation classique

Les composants principaux d'un système d'optique adaptative sont

1. l'analyseur de surface d'onde
2. le miroir déformable
3. le calculateur numérique temps réel



La Fig. 2.10 montre leur disposition. On aborde séquentiellement l'ASO, le DM et enfin le chronogramme d'opérations propre à l'OA et l'organisation des opérations réalisées par le calculateur numérique.

### 2.5.1.1 L'analyseur de surface d'onde

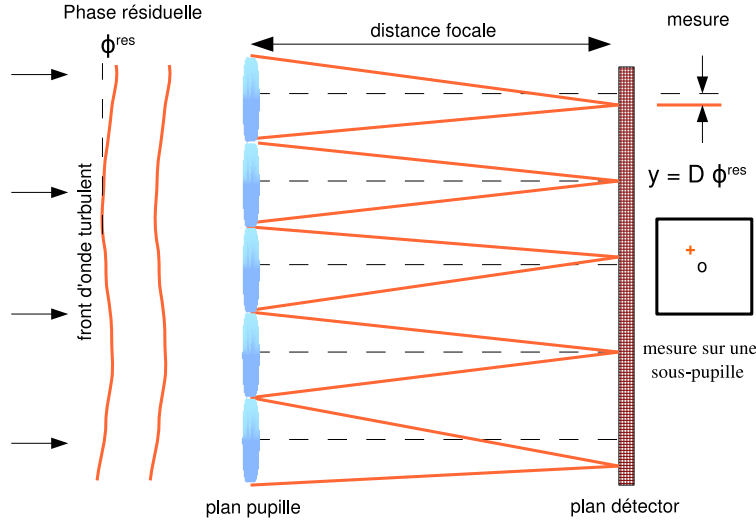


FIG. 2.11 – L'analyseur Hartmann-Shack, vue latérale. Le front d'onde est échantillonné spatialement et le gradient moyen local (bidimensionnel) est mesuré à l'aide d'un des algorithmes décrits dans le corps du texte.

**2.5.1.1.1 Plan pupille : Hartmann-Shack - HS** L'ASO HS représenté sur la Fig. 2.11, mesure le gradient moyen de la phase  $\nabla\phi(x, y)$  sur chaque sous-pupille, défini par

$$\nabla\phi \triangleq \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\phi \\ \frac{\partial}{\partial y}\phi \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

Les gradients locaux déplacent le centre de l'image au plan focal des sous-pupilles selon les relations

$$\frac{\Delta x}{f_0} \triangleq \frac{\lambda}{2\pi\Omega_p} \int \int_{\Omega_p} \frac{\partial\phi(x, y)}{\partial x} \partial y \partial x \quad (2.47a)$$

$$\frac{\Delta y}{f_0} \triangleq \frac{\lambda}{2\pi\Omega_p} \int \int_{\Omega_p} \frac{\partial\phi(x, y)}{\partial y} \partial y \partial x \quad (2.47b)$$

où  $f_0$  est la distance focale des micro-lentilles et  $\Omega_p$  est la surface total de la sous-pupille.

Les sous-pupilles placées aux bords du télescope (externe et interne) sont souvent sous-éclairées. Un seuil est choisi concernant le fraction de sous-éclairage pour valider la mesure d'une sous-pupille, car les mesures de sous-pupilles très peu éclairées sont par conséquent très bruitées.

L'Eq. (2.46) peut s'écrire sous forme matricielle par la relation linéaire

$$s = D\phi + w, \quad (2.48)$$

où  $s$  est un vecteur-colonne de mesures du gradient local,  $D$  est une matrice dont les lignes donnent les relations du gradient sur une sous-pupille en fonction des paramètres de la phase et  $w$  est le bruit de mesure. Le nombre de colonnes de  $D$  est théoriquement infini. Dans la pratique une base tronquée pour décrire  $\phi$  est utilisée et donc  $D$  devient par conséquent de taille finie.

Les déplacements  $\Delta x$  et  $\Delta y$  sont normalement évalués en mesurant le Centre de Gravité (CoG) de la tache image créée au foyer des sous-pupilles. Plusieurs méthodes ont été développées visant l'amélioration de la mesure et la diminution de l'impact du bruit par seuillage ou fenêtrage. Outre ce CoG classique ou pondéré [Nicolle *et al.*, 2004, Thomas *et al.*, 2006], des méthodes de corrélation existent – voir par exemple [Michau *et al.*, 1992]. Une approche plus récente est le filtre adapté<sup>1</sup> [Gilles et Ellerbroek, 2006].

**2.5.1.1.2 Bruit de mesure** On considère deux contributions principales au bruit de mesure : le bruit de photon et le bruit de lecture [Roddier, 1999]. Leur variance est rappelée sur le tableau 2.1 pour deux types d'algorithme de calcul des déplacements de l'image sur les sous-pupilles : le *Centre of Gravity* (CoG) et *Weighted Centre of Gravity* (WCoG).

Les paramètres suivants sont nécessaires à la caractérisation des bruits :

- $N_{ph}$  - nombre de photons par sous-pupille et par trame
- $N_T$  - largeur à mi-hauteur (en pixels) de l'image
- $N_D$  - fwhm de l'image de diffraction de la sous-pupille. En pixels, cette valeur est normalement de 2, pour un échantillonnage à Shannon.
- $N_s$  - Nombre linéaire de pixels utilisé par l'algorithme de centre de gravité
- $\sigma_e$  - nombre rms de photo-électrons par pixel et par trame

TAB. 2.1 – Bruit de mesure de l'ASO Hartmann-Schack.  $N_s$  est approximé par le nombre total de pixels dans sous-pupille. A noter que si  $d \gg r_0$ ,  $N_T/N_D = \frac{\lambda/r_0}{\lambda/d} = d/r_0$ .

Type	CoG	WCoG
Bruit de photon (rd <sup>2</sup> )	$\sigma_{ph}^2 = \frac{\pi^2}{2} \frac{1}{n_{ph}} \left( \frac{N_T}{N_D} \right)^2$	$\sigma_{ph}^2 = 2 \frac{\pi^2}{2 \ln(2)} \frac{1}{n_{ph}} \left( \frac{N_T}{N_D} \right)^2 \frac{(N_T^2 + N_s^2)^4}{(2N_T^2 + N_s^2)^2 N_s^4}$
Bruit de lecture (rd <sup>2</sup> )	$\sigma_{det}^2 = \frac{\pi^2}{3} \frac{\sigma_e^2}{n_{ph}^2} \left( \frac{N_s}{N_D} \right)^2$	$\sigma_{det}^2 = \frac{\pi^3}{32 \ln(2)^2} \frac{\sigma_e^2}{n_{ph}^2} \frac{(N_T^2 + N_s^2)^4}{N_T^2 N_s^4}$

**2.5.1.1.3 Plan focal : Pyramide - Pyr** Le concept d'ASO plan focal proposé par [Ragazzoni, 1996] est en effet une variation de l'ASO « couteaux de Foucault ». Le faisceau lumineux qui arrive au sommet de la pyramide produit quatre images de la pupille sur un plan d'observation, comme le montre la Fig. 2.12. La dérivée de la phase selon  $x$  et  $y$  est reliée à la différence d'intensité dans les cadrants. Mathématiquement, cela se traduit par les équations suivantes :

$$s_x(x, y) = \frac{I_1 + I_2 - I_3 - I_4}{I_0}, \quad (2.49a)$$

$$s_y(x, y) = \frac{I_1 + I_4 - I_2 - I_3}{I_0}, \quad (2.49b)$$

<sup>1</sup> *matched filter* en Anglais.

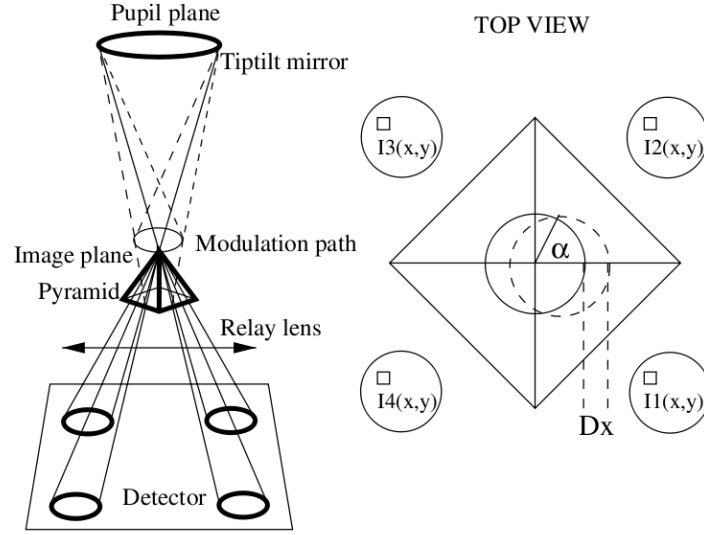


FIG. 2.12 – Principe d'opération de l'analyseur pyramide. Image retirée de Vérinaud et al., 2004.

où  $I_i$  est l'intensité enregistrée dans la sous-pupille localisée à  $(x, y)$  sur le quadrant  $i$ .

En régime de faibles perturbations

$$\sin(s_x) \approx s_x = \frac{\lambda}{\alpha\pi^2} \frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad (2.50a)$$

$$\sin(s_y) \approx s_y = \frac{\lambda}{\alpha\pi^2} \frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad (2.50b)$$

où  $\alpha$  est l'angle de modulation.

Pour une modulation inférieure à  $\alpha/\lambda$  cet analyseur présente un comportement analogue à un analyseur de pente et au-delà il devient un analyseur de phase [Vérinaud, 2004]. En boucle fermée, car seul le résidu de phase de faible amplitude est mesuré, l'approximation de mesures par des pentes est donc raisonnable.

L'analyseur à pyramide ne sera pas utilisé dans ce mémoire. Cependant, la nature des mesures étant étroitement liée aux gradients de phase, les développements effectués sont facilement généralisables à ce type d'ASO (voir notamment la section 3.4).

### 2.5.1.2 Le miroir déformable

Le miroir déformable, quelle que soit la technologie de fabrication et le composant exploité pour produire des déformations, est caractérisé par ses propriétés spatiales ainsi que temporelles. Des propriétés spatiales font partie la position dans l'espace (plan bidimensionnel) et la forme des fonctions d'influence [Roddier, 1999]. Pour un aperçu général du composant, la technologie de fabrication et la modélisation à éléments finis, se référer à [Ellis, 1999].

En absence de dynamique temporelle, la phase de correction est à chaque instant le produit des tensions  $u$  par la matrice d'influence. On obtient donc la relation linéaire

$$\boxed{\phi^{\text{cor}} = Nu, \quad \text{Phase de correction, MD infiniment rapide}} \quad (2.51)$$

avec  $N$  la matrice qui concatène les fonctions d'influence du MD.

**2.5.1.2.1 Fonctions d'influence** Pour des fins de modélisation, plusieurs modèles d'IF sont souvent utilisés. Les fonctions présentées ci-dessous sont séparables, autrement dit

$$IF(x, y) = IF(x)IF(y), \quad (2.52)$$

et supposées invariantes par translation. Cette propriété est exploitée aux chapitres 3 et 5 pour la modélisation dans une base de fréquences spatiales.

Ces fonctions sont normalisées par la distance inter-actionneur  $d_{act}$ , c'est-à-dire que pour  $x = 1$  la distance physique est de  $d_{act}$ . La constante  $c$  représente le coefficient de couplage mécanique, défini par la déformation normalisée subie par les premiers voisins quand un actionneur est poussé. Sur la Fig. 2.13 sont représentées les coupes de fonctions d'influence les plus communes et une vue bidimensionnelle de la fonction gaussienne.

– **Splines bilinéaires :**

$$IF_l(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \in [-1, 0]; \\ x - 1 & \text{si } x \in [0, 1]. \end{cases} \quad (2.53)$$

– **Splines cubiques :**

$$IF_c(x) = \begin{cases} 1 + (4c - 2, 5)|x|^2 + (-3c + 1, 5)|x|^3 & \text{si } |x| \leq 1; \\ (2c - 0, 5)(2 - |x|)^2 + (-c + 0, 5)(2 - |x|)^3 & \text{si } 1 < |x| < 2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.54)$$

– **Gaussiennes :**

$$IF_g(x) = e^{-\ln(c)x^2} \quad \forall x. \quad (2.55)$$

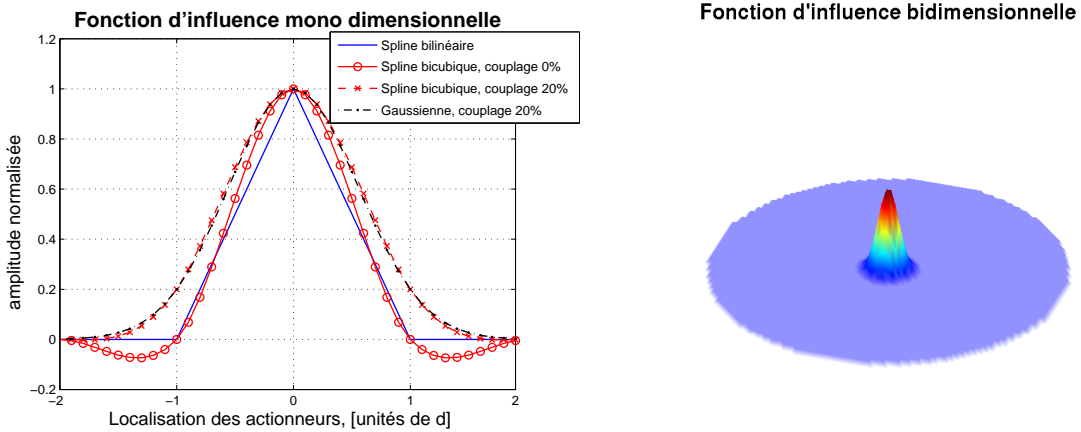


FIG. 2.13 – Fonctions d'influence. Gauche : coupe radiale. Droite : représentation bidimensionnelle d'une fonction d'influence Gaussienne.

**2.5.1.2.2 Dynamique temporelle** Le design optique des télescopes de dernière génération inclut des MD pré-focaux dans le train optique (voir par exemple [Arsenault *et al.*, 2006, Riccardi *et al.*, 2004,

Riccardi *et al.*, 2008]), cas aussi du futur ELT Européen et du TMT. Ces structures sont alors particulièrement affectées par l'impact du vent sur l'ensemble de la structure mécanique [Sedghi, 2007]). A ce propos voir aussi la section 2.3.2.4.

On fait comme hypothèse que l'espace de correction dans le cas dynamique reste celui engendré par les fonctions d'influence statiques du MD, concaténées dans la matrice N. Ceci dit, la phase de correction est donnée par

$$\phi^{\text{cor}}(t) = Np(t), \quad \text{Phase de correction, MD infiniment rapide} \quad (2.56)$$

où  $p(t)$  est la déformation instantanée de la surface du miroir sur une base normalisée de fonctions d'influence. Une description approfondie du comportement dynamique du MD est effectuée à la section 6.4.2.

En général, la dynamique temporelle des MD reste à ce jour relativement peu connue. Cela relève principalement du fait que les temps de réponse mono-actionneur sont souvent faibles vis-à-vis du temps d'intégration. En conséquence, l'impact sur la performance optique est généralement négligeable.

Il faut noter que la connaissance de la dynamique d'un seul actionneur pris isolément n'est pas descriptive de la dynamique de l'ensemble de la structure électromécanique du MD.

L'étude du comportement dynamique par modélisation d'éléments finis a fait l'objet de certains travaux ; à titre d'exemple [Charton *et al.*, 2003] et plus récemment [Gasmi *et al.*, 2008].

Les études expérimentales sont rares car elles nécessitent des moyens techniques complexes. Un exemple est la méthode stroboscopique. Elle consiste à faire l'acquisition cadencée d'images à fréquence élevée afin de reproduire le mouvement de la surface réfléchissante. Ces images peuvent être obtenues par techniques interférométriques [Horsleya *et al.*, 2007, Conway *et al.*, 2007]. Suite à une décomposition de la déformation sur une base de modes appropriée, le comportement dynamique global peut être ainsi caractérisé. Des paramètres de modèles d'ordre convenable calés sur le comportement physique du MD peuvent être alors déterminés.

## 2.5.2 Chronogramme d'opérations

L'ASO intègre la phase turbulente durant une période d'échantillonnage. Ceci correspond à accumuler du flux lumineux (des photons) pour en déduire une mesure de front d'onde. Après ce créneau d'intégration, dans un deuxième temps la mesure du détecteur est transformée en une mesure de phase ou de ses dérivées [cf. 2.5.1.1]. Plus précisément, pour le HS, ce sont les gradients locaux qui sont calculés. Il s'ensuit le calcul de la phase reconstruite et l'application de la loi de commande. Le MD est commandé avec deux trames de retard, puisque le calcul de la commande appliquée au MD (supposé constante sur un créneau) est calculée à partir de la phase intégrée deux trames avant.

La Fig. 2.14 montre le principe et la notation utilisée. La phase intégrée sur  $[(k-1)T_s, kT_s[$  est définie par

$$\bar{\phi}_k \triangleq \int_{(k-1)T_s}^{kT_s} \phi(t) dt, \quad (2.57)$$

alors que la commande appliquée sur la base de  $\bar{\phi}_k$  est

$$u_{k+1} \triangleq u(t), \quad t \in [(k+1)T_s, (k+2)T_s[. \quad (2.58)$$

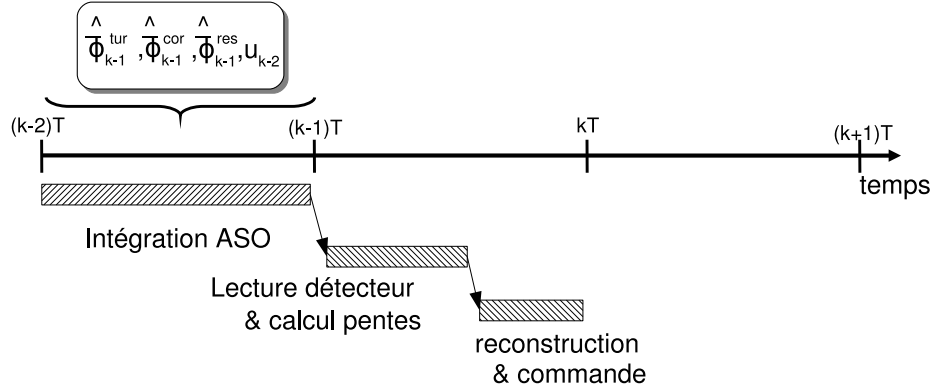


FIG. 2.14 – Organisation des opérations en OA. Le temps d'intégration de l'ASO d'une trame suivi du temps de lecture et de la reconstruction et commande caractérisent un système à retard. En général, ces dernières opérations équivalent à une trame de retard - le retard pur [J.W.Hardy, 1998]. Le système est donc dit à deux trames de retard.

### 2.5.3 Les différents espaces en OA

Il est possible de décomposer l'espace de dimension infinie  $\Psi$  sur lequel est défini le front d'onde  $\phi$  en plusieurs sous-espaces, correspondant aux parties observables, commandables et à ses compléments. La Fig. 2.15 illustre les différents espaces rencontrés en OA.

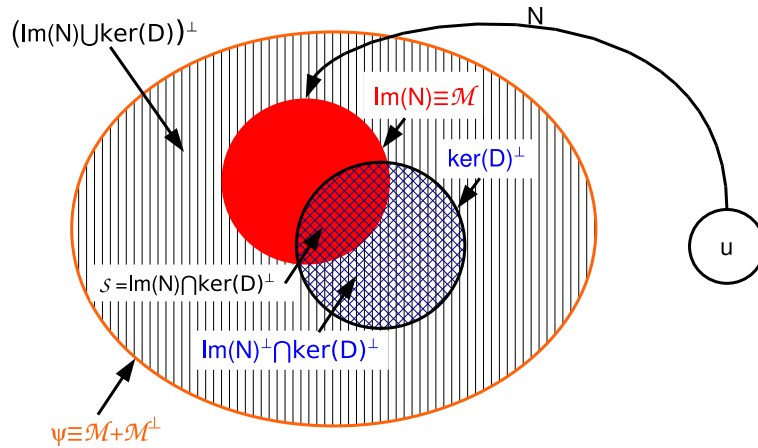


FIG. 2.15 – Espace des vecteurs de phase  $\Psi$ , phase observable  $(\ker(D)^\perp)$  et commandable  $(\mathcal{M})$ .

#### 2.5.3.1 Espace commandable

L'espace des phase peut se décomposer en deux sous-espaces orthogonaux complémentaires  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}^\perp$  :

$$\Psi = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp \quad (2.59)$$

Le premier correspond à l'espace engendré par les fonctions d'influence du MD, soit donc  $\text{Im}(\mathcal{N})$ , et le second à son complément.

### 2.5.3.2 Espace mesurable

L'espace mesurable  $\ker(D)^\perp$  est défini par l'espace orthogonal des vecteurs du noyau de  $D$ . Une partie de  $\ker(D)^\perp$  intersecte  $\mathcal{M}$  – il s'agit de la partie de l'espace observable qui est atteignable par les fonctions d'influence du MD. En général c'est dans ce sous-espace réduit qu'on travaillera.

Le noyau de  $D$  ( $\ker(D)$ ) inclut le mode piston, puisque un retard ou avance de phase constante implique une mesure nulle (les gradients sont nuls tous les deux) et aussi le mode gaufre, qui se trouve à la fréquence spatiale  $\frac{1}{2d}$  pour le HS. La Fig. 2.16 illustre le mode gaufre pour un système avec 20x20 sous-pupilles et la mesure résultante effectuée par un HS géométrique par application directe de l'Eq. (3.3). Les origines du mode gaufre sont abordées en plus de détail à la section 3.2.3.

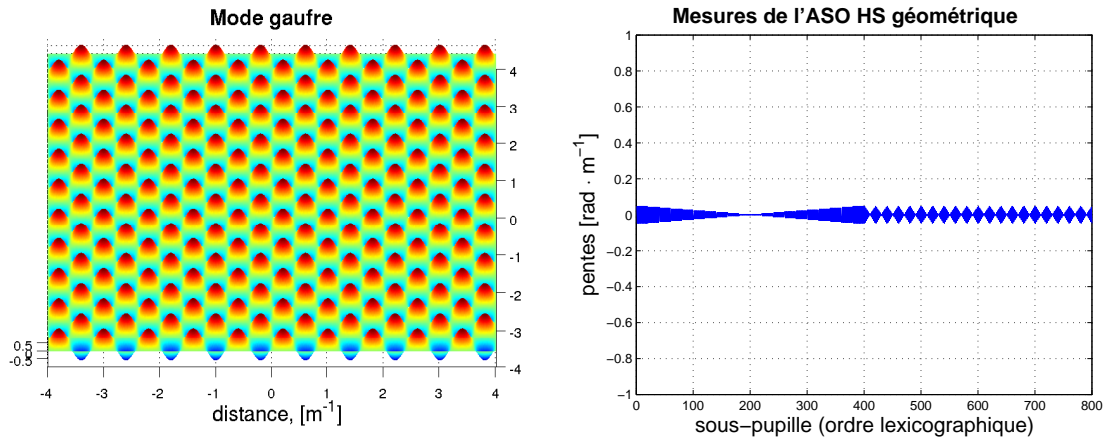


FIG. 2.16 – Gauche : Mode gaufre pour l'ASO Hartmann-Shack avec 20x20 sous-pupilles. Droite : Mesure non bruitées obtenue avec le HS géométrique. 40x40 pixels par sous-pupille, masque de phase rectangulaire pour éviter sous-éclairage pupillaire. Les variations autour de zéro sont dues aux effets de pixélisation.

## 2.6 Budget d'erreurs en OA

En OA, l'erreur totale peut être décomposée par une somme de termes

$$\sigma_{\text{res}}^2 = \sigma_{\text{scint}}^2 + \sigma_{\text{aniso}}^2 + \sigma_{\text{alias}}^2 + \sigma_{\text{bruit}}^2 + \sigma_{\text{fit}}^2 + \sigma_{\text{temp}}^2 + \sigma_{\text{calib}}^2 + \sigma_{\text{aberr}}^2 + \sigma_{\text{rem}}^2. \quad (2.60)$$

Ces erreurs sont séparées en trois sous-groupes : l'erreur de scintillation et d'anisoplanétisme, pour ce qui concerne les erreurs dues à l'atmosphère ; l'erreur de calibration et d'autres aberrations diverses sont regroupées par les erreurs de mise en œuvre. Elles ne sont pas abordées dans ce mémoire, leur contribution pouvant donc être considérée nulle. Les restantes sont intrinsèques à l'OA, soit les erreurs de repliement  $\sigma_{\text{alias}}^2$ , de mesure  $\sigma_{\text{bruit}}^2$ , de sous-dimensionnement  $\sigma_{\text{fit}}^2$  et l'erreur temporelle  $\sigma_{\text{temp}}^2$ . Elles sont traitées en plus de détail dans ce qui suit.

### 2.6.1 Erreurs dues à l'OA

- (i) Erreur de repliement  $\sigma_{alias}^2$  : Cette erreur correspond aux fréquences spatiales de la phase qui, à cause de l'échantillonnage de la mesure, se replient sur les basses fréquences.

Dans ce cas, l'erreur de repliement dans l'espace des phases peut se calculer comme étant la variance totale hors bande.

La Fig. 2.17 montre le rapport de la variance des fréquences repliées  $\sigma_{alias}^2 = \int_{\frac{1}{2d}}^{\infty} \mathbf{W}_{\phi} \nu d\nu$  sur la variance des fréquences non repliées obtenu en prenant

$$\frac{\sigma_{alias}^2}{\sigma_{nonalias}^2} = \frac{\int_{\frac{1}{2d}}^{\infty} \mathbf{W}_{\phi} \nu d\nu}{\int_{1/D}^{\frac{1}{2d}} \mathbf{W}_{\phi} \nu d\nu}. \quad (2.61)$$

Pour un échantillonnage spatial de 0,5m un rapport de  $10^{-3}$  est obtenu, autrement dit, environ 0,1% de l'énergie est au-delà de la fréquence  $1\text{m}^{-1}$  ;

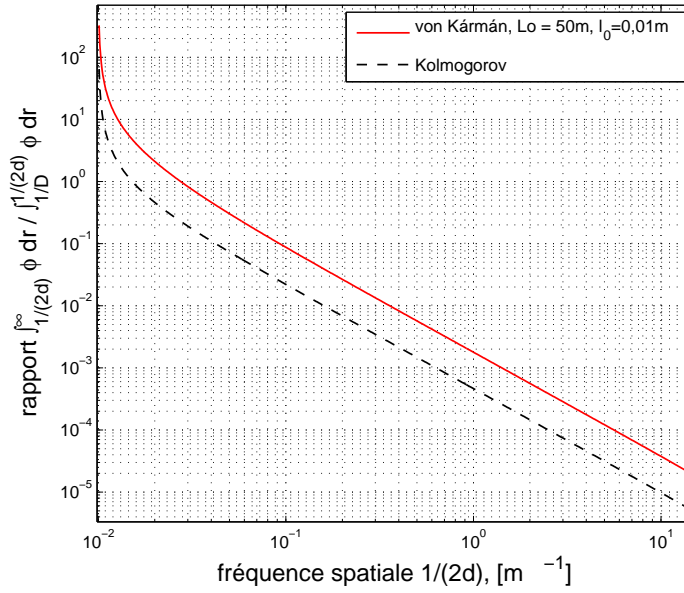


FIG. 2.17 – Rapport de variances de la phase échantillonnée et repliée.

- (ii) Bruit de mesure  $\sigma_{bruit}^2$  :

L'erreur de mesure est détaillée à la section 2.5.1.1.2 pour l'analyseur Hartmann-Shack.

- (iii) Erreur temporelle  $\sigma_t^2$  :

L'asservissement utilisé en OA introduit un retard de correction, qui se cumule avec le retard de mesure. L'erreur temporelle va s'accroître avec la vitesse d'évolution de la turbulence relativement à la fréquence d'échantillonnage de l'asservissement.

- (iv) Erreur de *fitting*  $\sigma_{fit}^2$

Le repliement *fitting* en OA correspond à l'erreur de sous-dimensionnement du système. Formellement, cette erreur correspond à  $\mathcal{M}^{\perp}$  [voir Fig. 2.15], c'est-à-dire la projection de la



phase  $\phi \in \Psi$  sur  $\mathcal{M}^\perp$ .

$$\sigma_{fit}^2 = \sigma_{\mathcal{M}^\perp}^2 = \frac{1}{S_\Omega} \left\langle \left\| \phi^{\mathcal{M}^\perp} \right\|^2 \right\rangle. \quad (2.62)$$

L'erreur de *fitting* peut s'écrire en supposant que le miroir créé essentiellement des basses fréquences

$$\sigma_{fit}^2 = \alpha^{\mathcal{M}^\perp} \left( \frac{d_{act}}{r_0} \right)^{5/3}, \quad (2.63)$$

où  $\alpha^{\mathcal{M}^\perp}$  est le coefficient de l'erreur de sous-dimensionnement. Cette erreur a été étudiée par différents auteurs, notamment par [Hudgin, 1977], [Ellerbroek, 1994] et [Rigaut *et al.*, 1998] qui trouvent selon les hypothèses (prise en compte du repliement)  $\alpha^{\mathcal{M}^\perp} = 0,287$ ,  $\alpha^{\mathcal{M}^\perp} \approx 0,3$  et  $\alpha^{\mathcal{M}^\perp} = 0,23$  respectivement.

## 2.7 Différents concepts d'Optique Adaptative

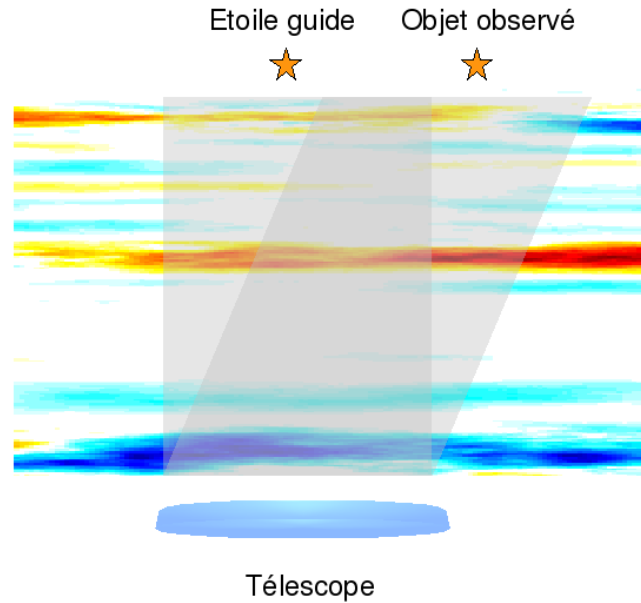


FIG. 2.18 – Anisoplanétisme : la phase turbulente dépend de la direction d'observation. Pour une OA classique, la correction est donnée par un seul miroir. La phase de correction est commune pour toutes les directions.

Dans le budget d'erreurs de l'Eq. (2.60), le terme  $\sigma_{aniso}^2$  représente l'erreur d'anisoplanétisme. Lorsque l'objet d'intérêt s'éloigne de l'étoile guide utilisée pour faire l'analyse de front d'onde, la correction apportée par l'optique adaptative se dégrade. La Fig. 2.18 schématise le principe.

L'origine physique de ce phénomène est liée à la distribution volumique de la turbulence atmosphérique, déjà présentée à la section 2.3.1.1. La phase turbulente est différente dans toutes les directions car à chaque direction correspond une section différente du volume. La correction par un seul miroir conjugué de la pupille ne suffit donc pas.

Pour s'affranchir des limitations de correction en OA classique imposées par l'anisoplanétisme, le concept d'OA multi-conjuguée a été développé. Proposé initialement par [Dicke, 1975], ce concept a ensuite été développé sur le plan théorique par différents auteurs, dont on cite les principaux [Beckers, 1988, Tallon *et al.*, 1992, Fusco *et al.*, 1999, Ragazzoni *et al.*, 2000]. La performance de ces systèmes a été étudiée par [Ellerbroek, 1994], [Tokovinin *et al.*, 2000] et [Tokovinin et Viard, 2001] dans le domaine des fréquences spatiales. Un effort important de recherche a été consacré à l'optimisation de la reconstruction tomographique par [Fusco *et al.*, 2001] et [Ellerbroek, 2002].

L'objectif de l'OAMC est donc de compenser l'anisoplanétisme. Ce nouveau concept repose sur la correction de la turbulence atmosphérique par plusieurs miroirs optiquement conjugués en altitude. L'analyse du volume turbulent est faite sur plusieurs étoiles guides (EG) selon deux approches différentes :

1. *star-oriented* : avec autant d'analyseurs que d'EG, chaque analyseur est dédié à une EG et mesure le front d'onde qui en provient. A partir des mesures directionnelles, la reconstruction de phase se fait dans le volume pour remonter à la perturbation dans les couches.
2. *layer oriented* : les analyseurs ne sont pas dédiés chacun à une EG mais sont conjugués à une couche turbulente et récoltent la lumière de toutes les étoiles guides [Ragazzoni *et al.*, 2000]. Les couches turbulentes sont reconstruites directement à partir des données de chaque ASO.

La reconstruction dans le volume, appelée reconstruction tomographique, est suivie d'une étape consistant à projeter la phase, en général reconstruite dans plus de couches, sur les couches auxquelles les MD sont optiquement conjugués.

La Fig. 2.19 montre l'apport de l'OAMC en terme de correction sur un champ de 150 arcsecondes.

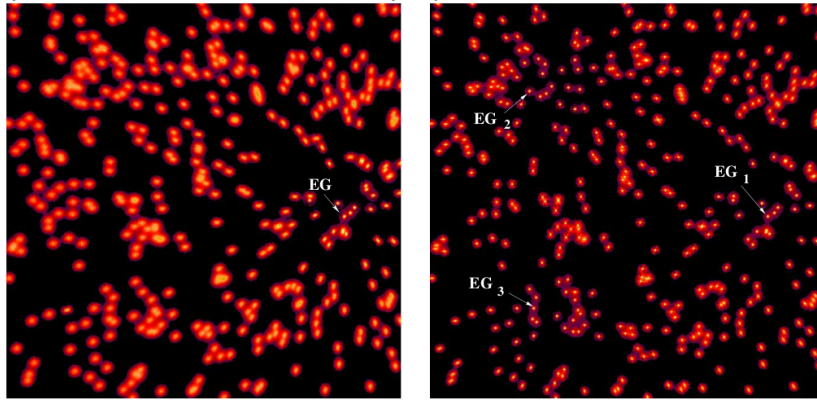


FIG. 2.19 – Simulation de correction par OA classique à gauche et par OAMC à droite, pour un champ de 150 arcsecondes et quatre couches turbulentes auxquelles les MD sont conjugués.

L'OAMC a depuis donné lieu à différentes variations qui ont en commun la multi-analyse du volume turbulent, associée à une problématique de tomographie. Les méthodes diffèrent essentiellement par les objectifs et moyens de correction

- correction optimisée sur axe grâce à un unique MD pour les cas de la LTAO (*Laser Tomographic AO*) ;
- correction optimisée en des points localisés du champ avec un MD spécifique pour chaque localisation, pour le cas de la MOAO (*Multi-Object Adaptive Optics*) ;
- correction en moyenne sur un grand champ par un unique MD pour la GLAO (*Ground-Layer Adaptive Optics*).

## 2.8 Introduction à la commande en OA

La commande classique en OA a été originalement formulée entièrement à temps continu [Roddier, 1999]. Cependant, la commande de systèmes hybrides (phases continues, commandes et mesures discrètes) mène plus naturellement à un traitement à temps discret, en s'assurant de la discrétisation soignée des variables continues.

La Fig. 2.20 illustre le principe. Des traits continus sont utilisés pour les paramètres continus et des tirets pour les paramètres discrets. Cette distinction sera gardée tout au long de ce mémoire. La sortie de l'ASO est un vecteur de mesures discrètes effectuées à partir d'une phase continue. Le MD fait l'opération inverse : il convertit les commandes discrètes en une phase de correction continue.

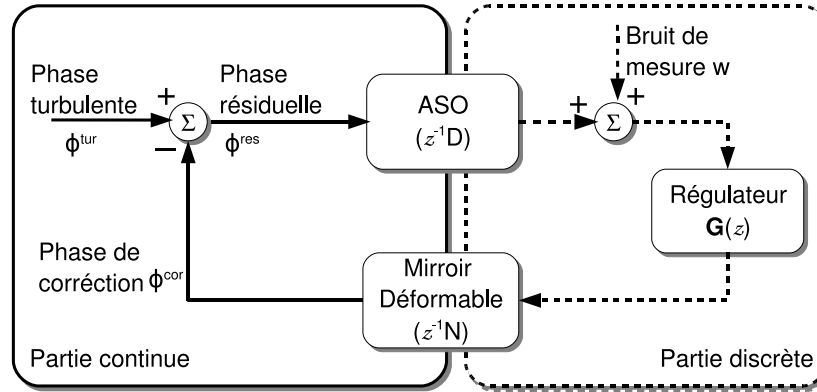


FIG. 2.20 – Schéma-bloc d'une OA.

Dans le cas particulier de l'OA, la synthèse de la commande vise à asservir de façon stable un système en boucle fermée. Des critères basés sur les marges de stabilité sont souvent utilisés :

**Marge de Gain** : l'inverse du module de la fonction de transfert de boucle, pris pour la fréquence correspondant à un déphasage de  $-180^\circ$ . En pratique, la marge de gain est la garantie que la stabilité sera maintenue malgré les variations imprévues du gain en boucle ouverte (BO).

**Marge de Phase** : le déphasage de la fonction de transfert de boucle, pris pour la fréquence correspondant à un gain unitaire. En pratique, la marge de phase est une garantie que la stabilité persistera malgré l'existence de retards parasites non modélisés.

### 2.8.1 Modélisation continue des boucles de commande

En temps continu, la dynamique de l'ASO peut être approximée par la fonction de transfert continue [Madec, 1999]

$$h_{ASO}(s) = e^{-sT_s/2} \text{sinc}(fT_s) = \frac{1 - e^{-sT_s}}{sT_s}, \quad (2.64)$$

avec  $s$  la variable d'intégration de la transformée de Laplace,  $s = i\omega$ ,  $\omega = 2\pi f$ ,  $f$  la fréquence temporelle en Hertz (Hz). Cette FT correspond à la convolution par une fonction « porte », représentant l'intégration temporelle de la phase. Cependant il n'y a pas d'échantillonnage temporel. Les paramètres sont considérés continus.

La FT  $h_{ASO}$  peut à son tour être approximée par un retard pur

$$h_{ASO}(s) = \frac{1 - e^{-sT_s}}{sT_s} \approx e^{-T_s/2s}. \quad (2.65)$$

Le MD est communément considéré infiniment rapide ou dans le meilleur des cas très rapide relativement à l'intervalle d'intégration. Une fonction de transfert permettant de représenter ce type de comportement est la suivante :

$$h_{MD}(s) = \frac{p}{s + p}, \quad (2.66)$$

où  $p$  est le pôle de la FT du MD, normalement de l'ordre de quelques kilohertz.

Enfin la FT du calculateur temps réel est approximée par un retard pur  $\tau$ . Ceci dit, alors

$$h_{RTC}(s) = e^{-s\tau}. \quad (2.67)$$

La modélisation à temps continu a été utilisée lors de la conception de différents systèmes d'OA, notamment les approches IGMO qu'on traitera ensuite. Cependant, on va plutôt modéliser la boucle d'OA à temps discret en regardant brièvement les différences en terme de transfert.

### 2.8.2 Modélisation discrète des boucles de commande

Les transferts de phase et de bruit à temps discret peuvent se déterminer par simple procédure d'identification sur la Fig. 2.21. La propriété suivante énonce le résultat.

**Propriété 2.1** *Le transferts de phase vaut*

$$\Phi^{\text{res}}(z) = \frac{1}{1 + z^{-2}\mathbf{G}(z)} \Phi^{\text{tur}}(z) \quad \text{Fonction de Transfert de phase} \quad (2.68)$$

avec  $\mathbf{G}(z) = \mathbf{C}(z)\mathbf{D}^\dagger\mathbf{D}$ , et  $\mathbf{C}(z)$  la fonction de transfert du contrôleur.

La fonction de transfert du bruit est linéaire aussi identifiée sur la Fig. 2.21, ce qui conduit à

$$\Phi^{\text{res}}(z) = \frac{z^{-1}\mathbf{C}(z)\mathbf{D}^\dagger}{1 + z^{-2}\mathbf{G}(z)} \mathbf{B}(z) \quad \text{Fonction de Transfert de bruit} \quad (2.69)$$

**Démonstration : Fonctions de transfert de phase et de bruit.**

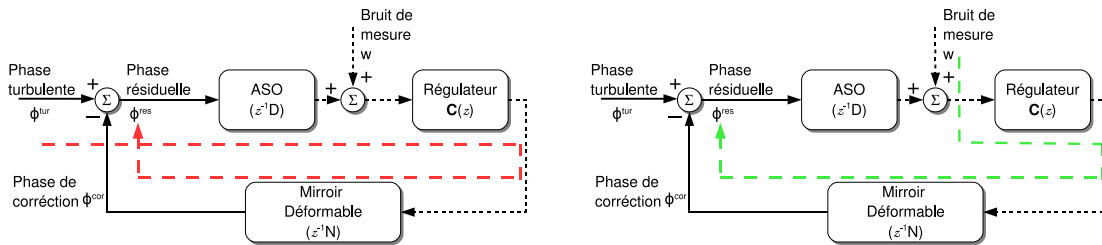


FIG. 2.21 – Gauche : Transfert de phase. Droite : Transfert de bruit.

Sachant que

$$\phi_k^{\text{res}} = \phi_k^{\text{tur}} - \phi_k^{\text{cor}}, \quad (2.70)$$

la relation suivante en s'appuyant sur le schéma de la Fig. 2.21, peut être obtenu

$$\Phi^{\text{res}} = \Phi^{\text{tur}} - z^{-1} \mathbf{N} \mathbf{C}(z) (\mathbf{D} \mathbf{N})^\dagger z^{-1} \mathbf{D} \Phi^{\text{res}} + z^{-1} \mathbf{N} \mathbf{C}(z) (\mathbf{D} \mathbf{N})^\dagger \mathbf{B}(z) \quad (2.71)$$

par transformée en  $\mathcal{Z}$ , ce que conduit directement à la fonction de transfert de la phase.

En posant  $\mathbf{B}(z) = 0$ , alors

$$\Phi^{\text{res}}(z) = \frac{1}{1 + z^{-2} \mathbf{G}(z)} \Phi^{\text{tur}}(z), \quad (2.72)$$

avec  $\mathbf{G}(z) = \mathbf{C}(z) \mathbf{D}^\dagger \mathbf{D}$ .

La fonction de transfert du bruit est déterminée à partir de l'Eq. (2.71) avec  $\Phi^{\text{tur}} = 0$ . La relation suivante est obtenue

$$\Phi^{\text{res}} = (1 + z^{-2} \mathbf{G}(z)) \Phi^{\text{res}} - z^{-1} \mathbf{C}(z) \mathbf{D}^\dagger \mathbf{B}(z), \quad (2.73)$$

d'où

$$\Phi^{\text{res}}(z) = \frac{z^{-1} \mathbf{C}(z) \mathbf{D}^\dagger}{1 + z^{-2} \mathbf{G}(z)} \mathbf{B}(z), \quad (2.74)$$

comme annoncé. ■

La Fig. 2.22-gauche montre les fonction de transfert de phase et de bruit pour deux valeurs de gain différentes. Un gain moins fort tend à rejeter plus de bruit moins la phase. Si l'on se restreint à l'intervalle de stabilité, une valeur optimale peut être trouvée mode à mode. C'est le but de l'approche présentée à la section 2.8.2.2.

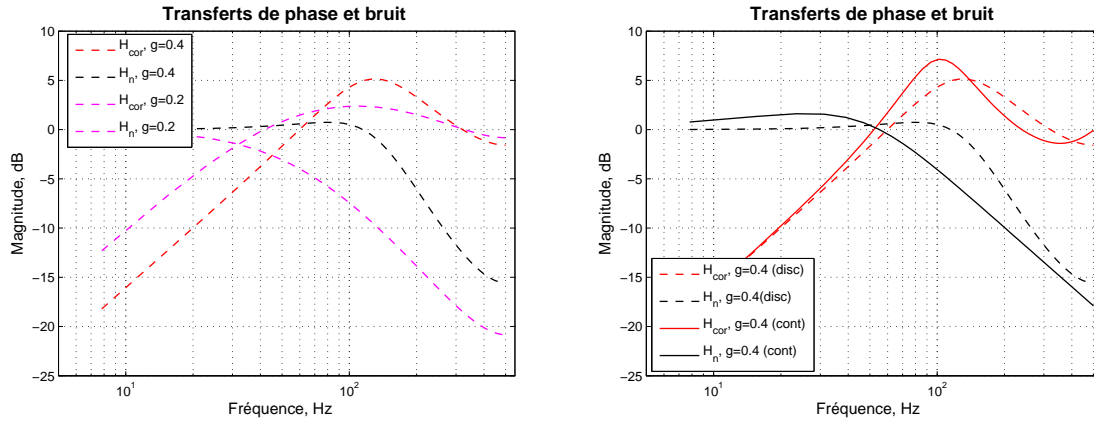


FIG. 2.22 – Gauche : Fonctions de transfert discrètes pour  $g=0,2$  et  $g=0,4$ . Droite : Comparaison des version continues et discrètes pour  $g=0,4$ . Le comportement à basses fréquences se rapproche ; aux hautes fréquences cependant, des différences considérables sont présentes.

### 2.8.2.1 L'approche par $C(z)$ intégrateur

L'intégrateur se caractérise par la récurrence

$$u_k = u_{k-1} + Gy_k. \quad (2.75)$$

Pour cet asservissement, le transfert de boucle vaut d'où s'obtient la fonction de transfert discrète propre <sup>2</sup>

$$\mathbf{u}(z) = G \frac{z}{z-1} \mathbf{z}(z) \quad (2.76)$$

La Fig. 2.23-gauche montre le diagramme de Bode pour le gain  $g = 0,5175$ . Ce gain garantit une marge de phase de  $45^\circ$  et une marge de gain de 1,9324.

A droite, sur la Fig. 2.23 est représenté le lieu des pôles. La boucle devient instable pour  $g \geq 1$ , valeur à partir de laquelle les pôles se trouvent à l'extérieur du cercle unitaire.

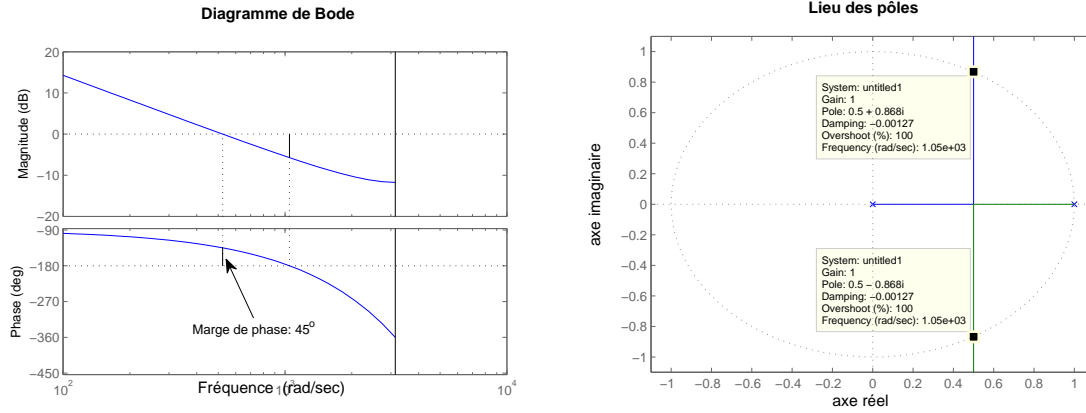


FIG. 2.23 – Gauche : Diagramme de Bode pour un gain  $g = 0,5175$ , garantissant une marge de phase de  $45^\circ$  et une marge de gain de 1,9324. Droite : Lieu des pôles du transfert de boucle. Pour  $g \geq 1$  la boucle devient instable.

### 2.8.2.2 Approches modales à gain optimisé - IGMO

L'Intégrateur à Gain Modal Optimal (IGMO) a été proposée par [Gendron et Léna, 1994] et validée expérimentalement par [Gendron et Léna, 1995]. Le formalisme adopté consiste à prendre les transferts continus [cf. §2.8.1]. Des optimisations de la loi de commande pour inclure un aspect prédictif ont été proposées par [Dessenne *et al.*, 1997, Dessenne *et al.*, 1998a] puis validées expérimentalement par [Dessenne *et al.*, 1999]. [Ellerbroek *et al.*, 1994] propose une optimisation conjointe de la bande passante et de la base de modes sur lesquels est décrite la phase.

L'approche IGMO consiste à minimiser un critère de phase résiduelle minimale pour chaque mode du miroir (qui sont mécaniquement découplés). Ce critère est la somme de deux sous-critères, à savoir une contribution de la phase résiduelle [Eq. (2.68)] et une contribution liée au bruit [Eq. (2.69)]. Le critère de variance de phase résiduelle peut se poser sous la forme

$$J(g) = J_\phi(g) + J_b(g) \quad (2.77)$$

<sup>2</sup>Une FT est strictement propre si le degré de son numérateur est strictement inférieur à celui de son dénominateur  $m < n$ . Propre tout court si  $m \leq n$ .

, où  $g$  est le gain modal de l'intégrateur. En jouant sur le gain, la bande passante de la loi de commande par intégrateur est ajustée [Fig. 2.22-gauche].

**Exemple :** La Fig. 2.24-gauche montre le principe de la minimisation. Les valeurs des deux critères

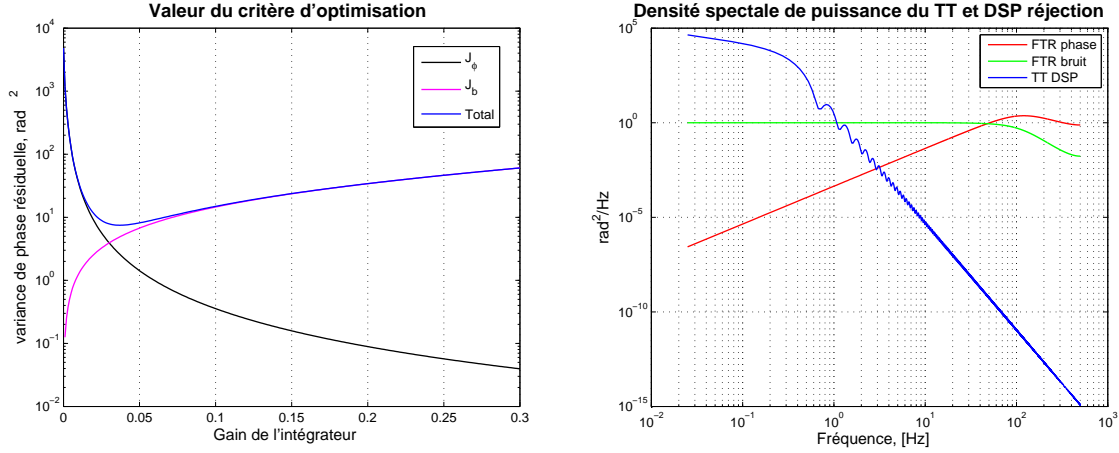


FIG. 2.24 – Principe de la minimisation de phase résiduelle IGMO. Gauche : les valeurs des critères  $J_\phi$  et  $J_b$  et la somme. Droite : DSP temporelle du tip/tilt atmosphérique et fonctions de réjection de phase et de bruit.

$J_\phi$  et  $J_b$  sont données en fonction du gain de l'intégrateur pour le mode tip/tilt atmosphérique. Les fonctions de transfert utilisées sont intégralement à temps discret (une différence par rapport au travail original de [Gendron et Léna, 1994]). Pour cet exemple qui vise à illustrer le principe, un minimum est atteint pour  $g \approx 0,035$ . La DSP temporelle et les fonctions de réjection sont présentées à la Fig. 2.24-gauche. ◀

## **Chapitre 3**

# **Reconstruction statique de front d'onde – l'approche Fourier**

Où les bases de la reconstruction statique de front d'onde dans l'espace de Fourier sont posées en vue de l'utilisation par des systèmes d'OA à grand nombre de degrés de liberté (GNDL).



---

**Sommaire**

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>53</b>
<b>3.2</b>	<b>Reconstruction statique de front d'onde – un problème inverse</b>	<b>54</b>
3.2.1	Problème direct	54
3.2.2	Reconstruction de front d'onde : un problème inverse	56
3.2.3	Le problème inverse en OA - inversion de la matrice d'interaction	58
3.2.4	Méthodes de reconstruction en OA	61
<b>3.3</b>	<b>Bases de modélisation – révision succincte de la littérature</b>	<b>61</b>
3.3.1	Modélisation zonale	62
<b>3.4</b>	<b>Modélisation du problème direct dans l'espace de Fourier</b>	<b>64</b>
3.4.1	Modèle de mesure complet dans le domaine des fréquences spatiales	65
3.4.2	Représentation de Fourier des modèles simplifiés de l'ASO HS	67
<b>3.5</b>	<b>Le problème inverse de reconstruction dans le domaine des fréquences spatiales</b>	<b>68</b>
3.5.1	Reconstruction moindres carrés sur les données	69
3.5.2	Reconstruction régularisée - le filtre MMSE de Wiener	70
3.5.3	Extension des pupilles circulaires aux pupilles carrées	70
3.5.4	Suppression des modes non-vus	76
3.5.5	Représentation continue de la phase	76
3.5.6	Coefficients de propagation du bruit	77
<b>3.6</b>	<b>Aperçu général des résultats des articles Correia et al., 2007 et Correia et al. 2008a</b>	<b>78</b>
<b>3.7</b>	<b>Simulations Monte Carlo – résultats de reconstruction statique</b>	<b>79</b>
3.7.1	Paramètres de simulation	79
3.7.2	Performance optique en fonction des méthodes d'extension	81
3.7.3	Effets du sous-éclairage	82
3.7.4	Effet de l'occultation centrale	83
3.7.5	Effet de la magnitude de l'étoile guide	84
3.7.6	Propagation du bruit dans la reconstruction	84
3.7.7	Etude de la FEP – localisation des erreurs	86
<b>3.8</b>	<b>Adaptation à la boucle fermée</b>	<b>86</b>
<b>3.9</b>	<b>Exploitation en temps réel – analyse algorithmique</b>	<b>87</b>
<b>3.10</b>	<b>Bilan et ouverture</b>	<b>89</b>

---

## 3.1 Introduction

La commande classique de systèmes d'OA, introduite à la section 2.8, utilise un reconstruteur obtenu par inversion de la matrice de modélisation linéaire du problème direct consistant à relier les mesures aux paramètres du phénomène physique que l'on vise à étudier. Cette étape dite de « reconstruction » est couplée à un régulateur temporel pour asservir le système en boucle fermée [Fig. 2.20].

Avec  $n$  le nombre de degrés de liberté d'un système d'OA, la complexité calculatoire de l'inverse d'une matrice est proportionnelle au cube de  $n$ , soit  $O(n^3)$ , ce calcul étant réalisé hors ligne. L'exploitation temps réel de ce type de commande est de l'ordre  $O(n^2)$  résultante de la multiplication d'un vecteur de mesures par ladite matrice de reconstruction. L'extension directe de ce raisonnement aux systèmes de taille ELT soulève des complications au niveau calculatoire : pour les ELT un facteur d'au moins  $10^3$  en puissance de calcul supplémentaire est requis vis-à-vis des systèmes actuels plus complexes<sup>1</sup>. La « loi de Moore<sup>2</sup> » n'est donc pas suffisante car d'ici une décennie seul un facteur  $2^{10/1.5} \approx 10^2$  sera obtenu. Il y a donc la nécessité de réduire le nombre d'opérations calculatoires des algorithmes de reconstruction et commande des systèmes d'OA en vue des futurs ELT caractérisés par un grand nombre de degrés de liberté (GNDL).

En mettant l'emphasis sur la modélisation du problème direct, ce chapitre vise à explorer les capacités d'estimation statique des algorithmes décrits sous une base de fréquences spatiales, en terme de performance optique et en terme de performance calculatoire (c'est-à-dire la capacité à réduire la quantité de calculs). D'une part il s'agit de caractériser et d'optimiser les méthodes de reconstruction existantes et de les réinterpréter afin de proposer une solution pour répondre aux GNDL. Les propriétés et résultats principaux liés à la base particulière des fréquences spatiales sont déclinés pour une exploitation ultérieure dans le cadre d'une stratégie de commande avec estimation dynamique et régulation en boucle fermée optimales au chapitre 5.

Ce chapitre est consacré à l'analyse du problème d'estimation statique séparément du choix du régulateur pour l'application à la boucle fermée. On propose ainsi de regarder indépendamment les aspects purement spatiaux liés à la reconstruction statique.

Les travaux précédents de reconstruction statique de front d'onde dans l'espace des fréquences spatiales sont nombreux. [Freischlad et Koliopoulos, 1986] ont étudié le problème de reconstruction sur une grille discrétisée de  $N \times N$  points. Toutefois, ceci n'est pas adapté à l'OA qui se caractérise par une pupille annulaire, en vertu du support carré utilisé. Ce n'est qu'en 2002 que [Poyneer et al., 2002] proposent une méthode d'extension des mesures de front d'onde au-delà des limites de la pupille du télescope, montrant ainsi que la méthode de Freischlad pouvait être exploitée dans le cadre d'un problème réaliste d'OA.

Les descriptions discrétisées s'appuient sur des représentations géométriques du front d'onde et des approximations creuses de l'analyseur de surface d'onde Hartmann-Shack (HS) [§2.5.1.1]. A ce sujet, plusieurs configurations ont été proposées, notamment celles de [Fried, 1965], [Hudgin, 1977] et [Southwell, 1980]. Cependant, aucune de ces configurations n'est exacte vis-à-vis du fonctionnement

<sup>1</sup>Systèmes d'ExAO pour les télescopes de classe 8-10m tels que SPHERE [Beuzit et al., 2006] et GPI [Macintosh et al., 2006].

<sup>2</sup>Selon G. Moore, la capacité de calcul double tous les 18 mois depuis 1965. Cette loi empirique, ou plutôt cette constatation, reste valable à l'heure actuelle.

réel du HS. Les méthodes d'extension théoriquement dérivées des contraintes aux bords spécifiques à l'OA, ne sont pas optimales non plus en présence de bruit. Ces deux aspects sont centraux dans ce chapitre : optimisation du modèle direct (de mesure) et optimisation des méthodes d'extension (de la pupille du télescope à la grille de reconstruction).

La construction du modèle direct et le formalisme de résolution de problèmes inverses par minimisation de critère sont présentés à la section 3.2. Une discussion succincte sur les bases de représentation est développée à la section 3.3, où la potentielle utilisation d'une base d'ondelettes est discutée.

Une nouvelle approche visant à raffiner la modélisation du HS dans l'espace des fréquences spatiales est présentée à la section 3.4. En revenant sur le formalisme établi pour le traitement du problème inverse, celui-ci est ensuite particularisé pour cette nouvelle modélisation à la section 3.5. Diverses méthodes d'extension de mesures sont présentées puis optimisées selon le modèle de mesure utilisé. Une méthode itérative est définie en modifiant l'algorithme de [Gerchberg, 1974] afin d'améliorer les propriétés des méthodes précédentes.

La performance optique est analysée à la section 3.7 pour la reconstruction statique en boucle ouverte. Une étude de sensibilité aux paramètres est réalisée, avant de proposer la généralisation à la boucle fermée à la section 3.8. La performance numérique en terme de coûts calculatoires et application aux environnements temps réel est analysée à la section 3.9.

## 3.2 Reconstruction statique de front d'onde – un problème inverse

La reconstruction de front d'onde s'insère dans le cadre des problèmes inverses où l'on cherche à restituer les paramètres d'un phénomène physique (en l'occurrence le front d'onde) à partir des observations (les mesures bruitées fournies par l'observation, liées à la phase par des lois physiques connues). Le cas particulier traité dans ce chapitre est celui de l'analyse de front d'onde caractérisé par la phase  $\phi$  à l'aide d'un analyseur Hartmann-Schack (HS) [§2.5.1.1].

La résolution du problème inverse passe par une étape initiale de modélisation du phénomène, dite problème direct. Celle-ci décrit comment les paramètres du modèle se traduisent en effets observables expérimentalement.

Un problème inverse linéaire peut être décrit par une équation de la forme suivante :

$$s = G \times p + w, \quad (3.1)$$

où  $s$  représente les mesures effectuées,  $p$  représente les valeurs des paramètres du phénomène,  $w$  regroupe les bruits (de mesure et autres) et  $G$  est un opérateur linéaire qui représente la relation entre les mesures et les paramètres du modèle.

Deux critères de minimisation sont décrits à la section 3.2.2 pour l'inversion du problème : le critère par attache moindres carrés aux données et critère à variance minimale (VM). L'analyse se restreint à l'ASO HS.

### 3.2.1 Problème direct

Sous hypothèse de linéarité, les mesures ASO peuvent se modéliser par une fonction linéaire de la phase moyennée temporellement sur un intervalle d'intégration [cf. section 2.5.1.1]. A ces mesures s'ajoute un bruit, supposé blanc et de distribution Gaussienne  $\mathcal{N}(0, \Sigma_w)$ , indépendant (spatialement et temporellement) entre sous-pupilles. L'équation de mesure s'écrit donc

$$s = D\bar{\phi} + w. \quad (3.2)$$

où la barre sur la phase  $\phi$  exprime l'intégration temporelle. Dans ce qui suit, compte tenu des intervalles d'intégration communément utilisés en OA très petits, on prend l'approximation  $\bar{\phi} = \phi$  – elle n'est valable que si l'on considère des temps de trame petits [Petit, 2006]. La matrice de covariance spatiale de la phase  $\phi$ , soit  $\Sigma_\phi$ , est supposée connue. Dans l'Eq. (3.2) les indices temporels ne sont pas présents, renforçant le caractère statique du problème.

L'ASO HS (décrit à la section 2.5.1.1) mesure le gradient moyen de la phase sur chaque sous-pupille. Cette opération s'exprime sous l'intégrale

$$\boxed{s[m, n] \triangleq \underbrace{\frac{1}{d} \int_{x_i}^{x_f} \int_{y_i}^{y_f} \nabla \phi(x, y) dy dx}_{s(x_i, y_i)}, \quad \text{Modèle de mesure théorique du HS}} \quad (3.3)$$

où  $\downarrow$  consiste à échantillonner les mesures tous les  $d$  mètres et  $x_f = x_i + d$ ,  $y_f = y_i + d$ . La distance  $d$  correspond au côté de la sous-pupille du HS. La notation  $s[m, n] \triangleq \downarrow s(x_i, y_i)$  est adoptée pour indiquer l'échantillonnage exact de la fonction continue.

Dans l'Eq. (3.3),  $\nabla \phi(x, y)$  est le gradient de la phase défini par

$$\nabla \phi \triangleq \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \phi \\ \frac{\partial}{\partial y} \phi \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Pour des sous-pupilles de côté  $d$ , l'Eq. (3.3) est mathématiquement équivalente à prendre la différence de la moyenne sur les bords (gauche/droite, haut/bas) comme suit

$$\boxed{s_x[m, n] = \int_{y_m}^{y_{m+1}} \phi(x_{n+1}, y) dy - \int_{y_m}^{y_{m+1}} \phi(x_n, y) dy, \quad \text{Pentes en 'x'}} \quad (3.5)$$

pour les pentes selon l'axe des  $x$  et

$$\boxed{s_y[m, n] = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \phi(x, y_{m+1}) dx - \int_{x_n}^{x_{n+1}} \phi(x, y_m) dx, \quad \text{Pentes en 'y'}} \quad (3.6)$$

pour les pentes en  $y$ , avec les définitions  $x_m \triangleq x(md)$ ,  $x_{m+1} \triangleq x(md + d)$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$  et de même pour  $y$ .

Les opérations des Eqs. (3.5)- (3.6) peuvent se mettre sous la forme matricielle de l'Eq. (3.2), où  $s$  est la concaténation des mesures dans les directions horizontale ( $x$ ) et verticale ( $y$ ) :

$$s = \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \end{bmatrix} = D\phi + w, \quad (3.7)$$

$D$  étant la matrice qui concatène les réponses individuelles de chaque sous-pupille à la phase incidente sur  $\Omega$ . Implicitement, on considère ici que les sous-pupilles sont toutes pleines. Les sous-pupilles sous-éclairées sont traitées de façon identique, les bornes n'étant plus définies par les côtés mais par le bord de la pupille principale du télescope. Se référer à la section 2.5.1.1 pour plus de détails.

### 3.2.2 Reconstruction de front d'onde : un problème inverse

La reconstruction de front d'onde sous-entend la détermination des paramètres de la phase  $\phi$  à partir des mesures bruitées délivrées par l'ASO [Mugnier et Le Besnerais, 2001, Mugnier, 2008]. Mathématiquement cela consiste à inverser le problème direct en posant

$$\hat{\phi} = R s, \quad (3.8)$$

où  $R$  est un opérateur linéaire qui sera particularisé selon le critère que l'on vise à minimiser.

#### 3.2.2.1 Approche moindres carrés sur les données

Soit le critère de minimisation

$$\hat{\phi}_{LS} = \arg \min_{\phi} \| s - D\phi \|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (3.9)$$

où l'on cherche la phase qui s'ajuste au mieux aux mesures par minimisation de l'écart quadratique. L'indice  $L^2(\Omega)$  indique que la norme  $L^2$  est définie sur la pupille  $\Omega$ . En prenant la dérivée partielle du critère en fonction de  $\phi$ , la solution qui minimise l'Eq. (3.9) est alors donnée par [Arthur Gelb, 1974]

$$\hat{\phi}_{LS} = R_{LS} s, \quad (3.10)$$

avec

$$R_{LS} = D^\dagger = (D^T D)^{-1} D^T, \quad \text{Reconstructeur moindres carrés} \quad (3.11)$$

où le symbole  $\dagger$  représente l'inverse généralisée de  $D$ .

**Remarques :** Cet estimateur, plus simple du point de vu conceptuel, présente les inconvénients suivants :

1. La matrice  $D$  est souvent mal conditionnée [cf. §2.5.3.1]. On limite le nombre de modes reconstruits en utilisant des procédures *ad-hoc* pour filtrer les modes mal vus. Habituellement, une troncature est appliquée suite à la décomposition de  $D$  en valeurs singulières.
2. La troncature permet un certain niveau de filtrage des modes non et mal vus. Malgré l'effet atténuant, la propagation du bruit demeure non optimisée.
3. En ajustant la phase estimée aux pentes mesurées au sens strict des moindres carrés, les *a priori* statistiques sur la phase et le bruit ne sont pas pris en compte. Le bruit reconstruit dans l'espace des phases (suite à la reconstruction) résulte en une loi de puissance de la forme  $\nu^{-2}$ . Sachant que  $\Sigma_\phi \propto \nu^{-11/3}$ , il est clair qu'au-delà d'une certaine fréquence l'estimation est donc dominée par le bruit ; la troncature est alors plus que nécessaire pour rendre l'estimation physiquement cohérente. ◀

#### 3.2.2.2 Approche bayésienne à variance minimale : solutions MMSE et MAP

Afin d'améliorer l'estimation par moindres carrés et s'affranchir des problèmes soulevés au paragraphe précédent, on cherche à estimer la phase qui se rapproche au mieux de la phase vraie. Puisqu'en OA le rapport de Strehl est maximisé par la minimisation de la variance d'erreur

d'estimation [Herrmann, 1992], il est alors souhaitable d'estimer la phase qui minimise en moyenne l'écart quadratique à la phase vraie, ce qui mène au critère MMSE<sup>3</sup> suivant

$$\hat{\phi}_{\text{MMSE}} = \arg \min_R \left\langle \|\phi - \hat{\phi}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\rangle. \quad (3.12)$$

En considérant des distributions gaussiennes<sup>4</sup> de phase et de bruit, l'estimateur linéaire MMSE qui minimise l'Eq. (3.12) s'écrit [Wallner, 1983, Fusco *et al.*, 2001, Ellerbroek, 2002]

$$\boxed{R_{\text{MMSE}} = \left( D^T \Sigma_w^{-1} D + \Sigma_\phi^{-1} \right)^{-1} D^T \Sigma_w^{-1}, \quad \text{Reconstructeur à variance minimale}} \quad (3.13)$$

où les termes  $\Sigma_\phi$  et  $\Sigma_w$  sont les matrices de covariance spatiale de la phase et du bruit respectivement. L'estimée est obtenue à partir de  $\hat{\phi}_{\text{MMSE}} = R_{\text{MMSE}} s$ .

**Remarques :** Le reconstructeur  $R_{\text{MMSE}}$  peut s'écrire aussi sous forme dite information

$$R_{\text{MMSE}} = \Sigma_\phi D^T \left( D \Sigma_\phi D^T + \Sigma_w \right)^{-1}, \quad (3.14)$$

par application directe du théorème d'inversion matricielle. ◀

Toujours sous les hypothèses de linéarité et statistiques gaussiennes, il est aussi possible de montrer que la solution MMSE est équivalente à une approche du type *maximum a posteriori* (MAP), où l'on chercherait à estimer la phase la plus probable sachant les mesures effectivement effectuées.

Selon le théorème de Bayes, la fonction densité de probabilité  $\mathcal{P}$  de  $\phi$  sachant  $s$ , notée  $\mathcal{P}(\phi|s)$ , s'écrit

$$\mathcal{P}(\phi|s) \propto \mathcal{P}(s|\phi) \times \mathcal{P}(\phi) \propto \exp \left( -\frac{1}{2} (s - D\phi)^T \Sigma_w^{-1} (s - D\phi) \right) \times \exp \left( -\frac{1}{2} \phi^T \Sigma_\phi^{-1} \phi \right). \quad (3.15)$$

L'estimée du *maximum a posteriori*,  $\hat{\phi}_{\text{MAP}}$ , vise alors à maximiser cette densité de probabilité, ce qui met à profit les connaissances *a priori* sur la perturbation et le bruit. Il vient donc [Arthur Gelb, 1974]

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{\text{MAP}} &= \arg \max_{\phi} \mathcal{P}(\phi|s) \\ &= \arg \min_{\phi} \left( (s - D\phi)^T \Sigma_w^{-1} (s - D\phi) + \phi^T \Sigma_\phi^{-1} \phi \right) \\ &\triangleq R_{\text{MAP}} s, \end{aligned} \quad (3.16)$$

où ici  $R_{\text{MAP}} = R_{\text{MMSE}}$ .

Cet estimateur garantit donc une reconstruction à variance minimale d'erreur d'estimation et la meilleure interpolation des mesures ASO basée sur les *a priori* spatiaux de la phase et du bruit. Grâce à la régularisation, l'estimation d'un nombre infini de modes est possible car le conditionnement de la matrice à inverser est maintenant stabilisé.

**Remarques :** D'autres estimateurs se dérivent comme cas limites de la solution MMSE

<sup>3</sup>Minimum Mean Square Error en anglais.

<sup>4</sup>La phase sur la pupille étant la résultante d'un grand nombre de processus aléatoires indépendants (comme le passage par de nombreuses couches turbulentes) par le théorème de la limite centrale elle correspond donc à un processus gaussien.

- Si  $\Sigma_\phi^{-1} = 0$ , c'est le cas des moindres carrés pondérés
- Si de plus  $\Sigma_w = I$ , alors on retrouve la solution moindres carrés de l'Eq. (3.11). ◀

La covariance de l'erreur d'estimation est donnée par

$$\left\langle \left( \phi - \hat{\phi}_{\text{MMSE}} \right) \left( \phi - \hat{\phi}_{\text{MMSE}} \right)^T \right\rangle = \left( D^T \Sigma_w^{-1} D + \Sigma_\phi^{-1} \right)^{-1}. \quad (3.17)$$

Dans ce qui suit, les nomenclatures MMSE, MAP ou « variance minimale » (VM) sont utilisés indistinctement pour se référer aux estimateurs linéaires qui minimisent la variance d'erreur d'estimation.

### 3.2.3 Le problème inverse en OA - inversion de la matrice d'interaction

L'approche communément mise en place en OA consiste à prendre comme modèle direct l'opération reliant les mesures aux déformations du miroir, sans passer explicitement par la phase. Ces relations sont regroupées au sein d'une matrice d'interaction. La matrice  $D$ , qui représente l'influence de la phase sur les mesures, n'est ainsi jamais calculée explicitement. La matrice d'interaction  $DN$  est obtenue en appliquant des tensions sur les actionneurs et en enregistrant les mesures individuelles qui en résultent.

Le modèle s'exprime donc sous la forme

$$s = DNu + w. \quad (3.18)$$

On obtient ainsi modèle direct reliant les mesures aux tensions, permettant de travailler sur  $\mathcal{S}$ , l'espace mesurable et commandable sur la Fig. 2.15 même si, en toute rigueur, il faudrait cependant aussi rendre compte du fait que  $\phi \notin \mathcal{M}$ , car ses composantes sur  $\mathcal{M}^\perp$  participent aussi à la mesure.

L'inversion généralisée de  $DN$ , dite matrice de commande, s'écrit

$$M_{\text{com}} = \left( N^T D^T D N \right)^{-1} N^T D^T. \quad (3.19)$$

et les commandes  $u$  s'obtiennent immédiatement de

$$\begin{aligned} u &= M_{\text{com}} s \\ &= M_{\text{com}} DNu + M_{\text{com}} w. \end{aligned} \quad (3.20)$$

où le dernier terme de la deuxième ligne représente la contribution du bruit propagé lors de l'inversion.

Des méthodes optimisées visant à améliorer le RSB lors de l'enregistrement de la matrice d'interaction utilisent des motifs de Hadamard [Kasper *et al.*, 2004] dans la base des tensions. Des idées analogues en cours d'analyse visent plutôt l'augmentation de la dynamique du système dans l'espace des mesures [Meimon, 2009].

La covariance de l'erreur d'estimation se calcule de la façon suivante

$$\left\langle (u_k - \hat{u}) (u - \hat{u})^T \right\rangle = R_{\text{com}} \left\langle w w^T \right\rangle R_{\text{com}}^T. \quad (3.21)$$

Cette équation représente le bruit propagé à travers la reconstruction. Elle est explorée en plus de détail dans le cadre de l'approche de reconstruction dans l'espace des fréquences spatiales à la section 3.5.6.

### 3.2.3.1 Obtention de la matrice de commande $M_{com}$

La matrice de commande est obtenue par décomposition en valeurs singulières de la matrice DN

$$DN = [U_{\parallel} U_{\perp}] \text{diag}(S^{vs}) \begin{bmatrix} V_{\parallel} \\ V_{\perp} \end{bmatrix}^T, \quad (3.22)$$

où  $U_{\parallel}$  est une base orthogonale de modes appartenant à  $\mathcal{S}$  dans la Fig. 2.15, c'est-à-dire les modes qui sont à la fois mesurables (puisque associés à une valeur singulière non nulle) et commandables (puisque  $\in \mathcal{M}$ ).

L'inverse généralisée de DN s'obtient de

$$(DN)^{\dagger} = V [\text{diag}(S^{vs})]^{-1} U^T. \quad (3.23)$$

Les vecteurs de  $U_{\perp}$  engendrent l'espace des modes dont la mesure est nulle. Autrement dit,  $U_{\perp}$  est une base de modes du noyau de DN. Les vecteurs dans  $V_{\perp}$  sont une base des déformations engendrées par le MD qui produisent une mesure nulle.

Le conditionnement d'une matrice est défini par le rapport des valeurs singulières la plus et la moins élevées

$$\kappa(A) = \frac{\max(S^{vs})}{\min(S^{vs})}, \quad (3.24)$$

où  $S^{vs}$  est donnée à l'Eq. (3.22).

La matrice DN est souvent mal conditionnée, comme le montre la Fig. 3.1. Le conditionnement change en fonction de la configuration de sous-pupilles et actionneurs, le seuil de sous-éclairage considéré, le RSB, etc.

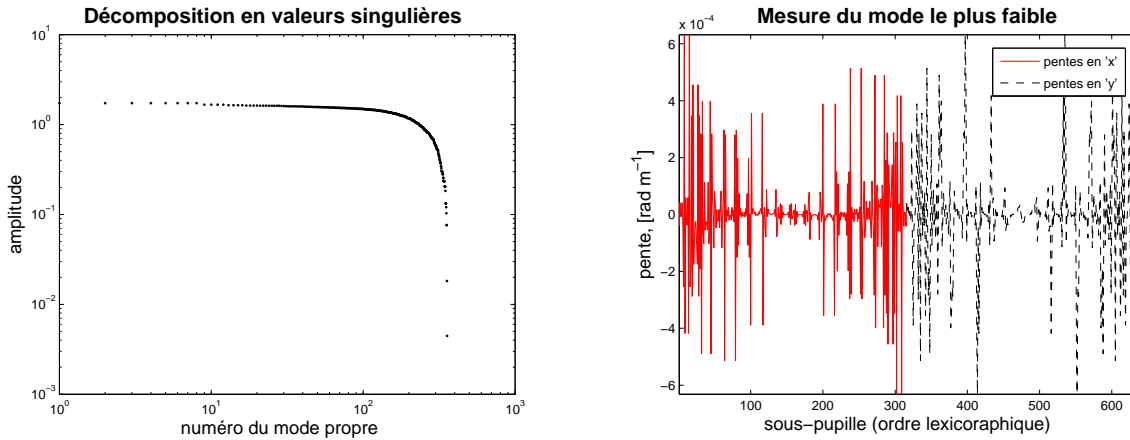


FIG. 3.1 – Gauche : Décomposition en valeurs singulières de la matrice d'interaction d'un système d'OA classique avec  $20 \times 20$  sous-pupilles avec configuration de Fried (actionneurs aux coins des sous-pupilles). Droite : mesure engendrée par le mode de  $V$  associé à la valeur singulière la plus faible de  $S^{vs}$  (dans la matrice de décomposition  $[U S^{vs} V^T]$  de l'Eq. (3.22)).

Pour l'ASO HS, deux modes sont structurellement dans  $V_{\perp}$ , le piston et le mode gaufre. Le piston car un retard ou avance de phase n'induit qu'une mesure nulle, sans impact en terme de correction par OA ; le mode gaufre, représenté sur la Fig. 2.16, correspondant à une unique fréquence à  $1/(2d)\text{m}^{-1}$ . Cette fréquence spatiales conduit à une mesure théoriquement nulle.



La décomposition en valeurs singulières montre aussi d'autres modes dans le noyau de la matrice d'interaction, notamment le mode gaufre localisé. Ses origines sont approfondies dans la section qui se suit.

### 3.2.3.2 Sur les origines du gaufre localisé

Le mode gaufre localisé ne correspond pas au mode gaufre « pur » présenté sur la Fig. 2.16. Le gaufre « pur » s'étend sur l'ensemble de la pupille alors que le gaufre « localisé » correspond à une sorte de damier irrégulier.

La présence de ce mode est intrinsèque à la modélisation des systèmes d'OA, notamment au problème de bords, qu'il s'agisse d'une pupille annulaire ou autre et quel que soit le sous éclairage considéré.

La pupille  $\Omega$  étant finie, les combinaisons de déplacements aux bords pour lesquels la commande des actionneurs engendre une mesure nulle sont moins contraints. Les actionneurs placés aux bords du support ont par conséquent plus de combinaisons linéaires de déplacements qui engendrent une mesure nulle ou quasi nulle que les actionneurs entourés de sous-pupilles. Cet aspect est illustré sur la Fig. 3.2 pour un masque pupillaire carré et sur la Fig. 3.3 pour un masque circulaire plus réaliste.

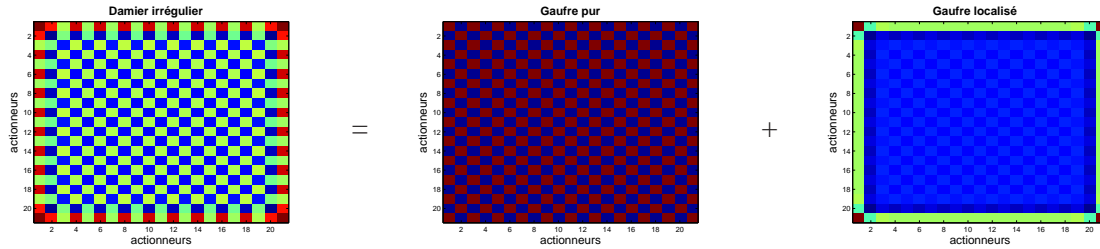


FIG. 3.2 – Gaufre localisé. Ce mode correspond au mode de  $V$  associé à la valeur singulière la plus faible de  $S^{vp}$ . Les composantes piston et gaufre pur ont été séparées pour rester avec la composante gaufre localisée seule. Une couronne de valeurs alternantes montrent le mode gaufre localisé.

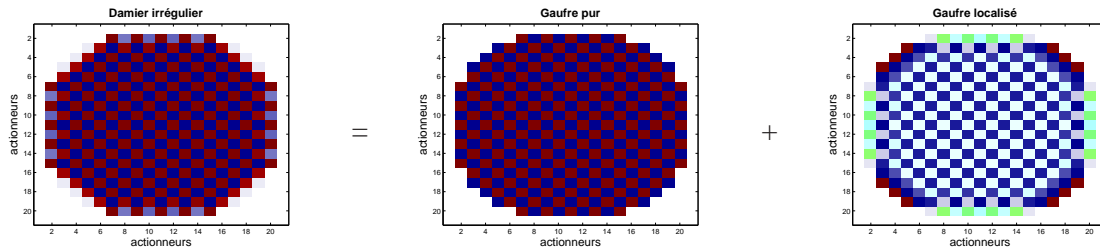


FIG. 3.3 – Même légende que pour la Fig. 3.2 pour un masque pupillaire circulaire.

Uniquement des mesures non bruitées sont utilisées pour cet exemple, permettant d'obtenir des matrices synthétiques.

On rajoute aux justifications avancés par [Gavel, 2003], que le mode gaufre localisé n'est pas généré seulement par le bruit de mesure, il est intrinsèquement lié au problème de bords. Des matrices d'interaction obtenues par simulation, enregistrées sans bruit et sans sous pupilles sous éclairées (voir

définition à la section 2.5.1.1) montrent que les valeurs singulières d'amplitude très faible sont une combinaison linéaire de trois modes, à savoir : piston et gaufre purs et gaufre localisé. Ceci illustre l'apparition gênante dans de divers systèmes d'OA du mode gaufre localisé et la mesure quasi nulle engendrée. Le filtrage de ce mode est par conséquent nécessaire, comme proposé dans plusieurs travaux [Wiberg *et al.*, 1994b, Diolaiti *et al.*, 2003, Gavel, 2004].

### 3.2.4 Méthodes de reconstruction en OA

Une liste non exhaustive est présentée dans le but de repérer les principales méthodes proposées ces dernières années pour la reconstruction statique de front d'onde en OA.

1. **Méthodes itératives** : La solution du problème  $\hat{\phi} = Rs$  est obtenue au moyen de méthodes itératives pour l'inversion du problème direct sans jamais calculer explicitement  $R$ . L'algorithme des gradients conjugués est utilisé avec pré-conditionnement multi-grilles [Hackbusch, 1985] en OA classique et multi-conjuguée dans les travaux de [Vogel, 2004, Gilles *et al.*, 2002, Gilles, 2003a, Gilles *et al.*, 2003b, Gilles *et al.*, 2003a] et avec pré-conditionnement de Cholesky [Saad, 1996], dans [Gilles, 2003b]
2. **Méthodes par inversion de matrices creuses** : La caractéristique creuse de la matrice du problème direct est exploitée pour aboutir au résultat requis  $\hat{\phi} = Rs$  en faisant toujours des multiplications par des matrices creuses et/ou de bas rang [Ellerbroek, 2002, Ellerbroek *et al.*, 2003].
3. **Méthodes hiérarchiques** : Reconstruction du front d'onde par résolutions spatiales de plus en plus fines : [MacMartin, 2003, Shi *et al.*, 2002] ou par sous-régions [Correia, 2006].

## 3.3 Bases de modélisation – révision succincte de la littérature

Les bases utilisées en OA pour décrire la phase sont diverses. La modélisation et simulation peut être réalisée sur une base de polynômes de Zernike (décrits à la section 2.4.2), une base de Karhunen-Loève (modes qui diagonalisent la matrice de covariance spatiale de la phase) [Dai, 1995] ou de façon plus restreinte, sur une base de modes liée au MD : les modes propres ou des projections sur  $\mathcal{M}$  convenablement tronquées. [Dai, 2006] fait une présentation générale sur l'utilisation de certaines bases et de leur conversion, dont les polynômes de Zernike et la série de Fourier.

Théoriquement, la base des modes de Karhunen-Loève étant la base des composantes principales est donc celle qui concentre sur un plus petit nombre de modes le maximum d'énergie. En plus, les modes sont statistiquement indépendants vis-à-vis de la turbulence. Cependant, contrairement aux polynômes de Zernike, aucune expression analytique n'existe et leur calcul numérique peut s'avérer lourd.

D'autres bases peuvent aussi être envisagées. Une base dont l'intérêt est de plus en plus grand est la base des ondelettes [Burrus *et al.*, 1998, Walker, 1999], pour laquelle les coefficients sont calculés de façon numériquement très efficace. La transformée en ondelettes permet de décomposer la phase sur des modes à différentes résolutions spatiales, caractéristique adaptée à capturer la nature fractale de la phase [Schwartz *et al.*, 1994]. Une présentation succincte est donnée pour pointer quelques pistes potentielles.

[Bowman et Rhodes, 1997] et [Dowla *et al.*, 2000] utilisent une base d'ondelettes pour diminuer le nombre total de calculs liés à la reconstruction de phase. Pour une équation de reconstruction générale du type  $\hat{\phi} = Rs$ , où  $R$  est un reconstruteur linéaire, une transformation de  $R$  et  $s$  dans l'espace des ondelettes est proposée, les calculs s'effectuant à moindre coût dans cet espace. Il est argumenté que l'application de la transformée en ondelettes étant très rapide, au total la reconstruction

requiert moins de calculs. Les simulations réalisées dans le cadre de cette thèse montrent que la performance est gravement affectée, notamment la reconstruction des plus hautes fréquences. C'est aussi le comportement constaté notamment par Dowla *et al.*

Plus récemment, [Hampton *et al.*, 2009] propose l'utilisation d'une base d'ondelettes de Haar pour représenter directement les mesures de pente du HS. Les modèles zonaux de mesure de Hudgin et Fried (voir ensuite la section 3.3.1.1) sont en effet la première étape de l'application de la transformée de Haar. La phase est obtenue par transformée inverse de l'ondelette de Haar.

Les travaux de [Jones, 2003, Jones, 2004, Jones, 2009] utilisent aussi une base d'ondelettes pour la reconstruction de phase uniquement, malgré l'insertion trompeuse dans le cadre d'un problème de commande.

L'utilisation d'une base de fréquences spatiales est l'objet principal de ce chapitre. La section suivante traite ce problème particulier dans le cadre de la modélisation de l'ASO HS.

### 3.3.1 Modélisation zonale

L'utilisation d'une base de fréquences spatiales pour procéder à la reconstruction de front d'onde présuppose que la phase, mesures et commandes sont échantillonnées sur une grille de points. Cela revient à dire qu'une approche zonale est sous-jacente à l'utilisation de la transformée de Fourier et conséquentes opérations dans l'espace de Fourier.

#### 3.3.1.1 Modèles zonaux de l'ASO HS

Afin de simplifier le modèle de mesure des Eqs. (3.5-3.6) plusieurs configurations ont été proposées. Ces configurations ne sont plus que des approximations du vrai HS. Ces modèles simplifiés admettent pour modèle direct des représentations creuses (car modélisées par l'intégrale de convolution par une matrice de noyau localisé au niveau spatial). Ce point se revêt d'une importance majeure, puisque les mesures peuvent désormais être approximées par des modèles point-à-point qui échantillonnent la phase aux coins des sous-pupilles. On suppose implicitement que l'échantillonnage spatial de la phase est suffisamment élevé pour éviter des problèmes de repliement de phase.

Les trois configurations principales qui sont abordées dans ce mémoire sont illustrées sur la Fig. (3.4).

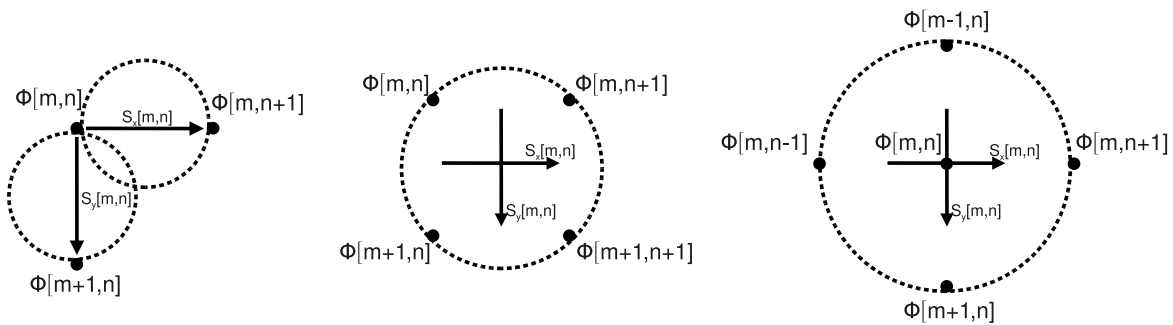


FIG. 3.4 – Configurations (ou géométries) de Hudgin (gauche), Fried (centre) et Southwell (droite). Les cercles représentent les points de phase qui participent à la mesure de pente et ce pour chaque géométrie. Les circonférences pointillées représentent les sous-pupilles fictives équivalentes qui n'ont pas d'existence réelle.

**3.3.1.1.1 Hudgin** La géométrie de Hudgin (représentée sur la Fig. (3.4)-gauche), ainsi dénommée d'après [Hudgin, 1977], suppose que les mesures du HS sont les premières différences discrètes de deux points adjacents :

$$s_x^H[m, n] = \phi[m, n + 1] - \phi[m, n], \quad (3.25a)$$

pour  $m \in [1, N], n \in [1, N - 1]$  et

$$s_y^H[m, n] = \phi[m + 1, n] - \phi[m, n], \quad (3.25b)$$

pour  $m \in [1, N - 1], n \in [1, N]$ . Cette configuration néglige la moyenne aux bords [Eqs. (3.5-3.6)], autrement dit, la moyenne est approximée par un seul point de phase.

**3.3.1.1.2 Fried** La géométrie de [Fried, 1977], (Fig. (3.4)-centre), remplace la moyenne aux bords par une moyenne sur deux points placés aux coins de la sous-pupille. Ceci conduit au modèle

$$s_x^F[m, n] = \bar{\phi}_y[m, n + 1] - \bar{\phi}_y[m, n], \quad (3.26a)$$

$$s_y^F[m, n] = \bar{\phi}_x[m + 1, n] - \bar{\phi}_x[m, n], \quad (3.26b)$$

pour  $m \in [1, N - 1], n \in [1, N - 1]$ . Dans ces équations,  $\bar{\phi}_x[m, n] = \frac{1}{2} (\phi[m + 1, n] + \phi[m, n])$  et  $\bar{\phi}_y[m, n] = \frac{1}{2} (\phi[m, n + 1] + \phi[m, n])$  sont les moyennes de phase sur les côtés, approximées par deux points.

Contrairement à la configuration de Hudgin, le modèle de Fried est implicitement exact vis-à-vis des Eqs. (3.5-3.6) pour une phase décrite sur une base de fonctions bi-linéaires.

**Remarques :** Il faut noter que la géométrie de Fried est « aveugle » à la fréquence  $(k, l) = \pm N/2$ , correspondant à la fréquence physique  $1/(2d)m^{-1}$ , soit le mode gaufre de la Fig. 2.16. ◀

**3.3.1.1.3 Southwell** La géométrie de [Southwell, 1980] (Fig. (3.4)-droite) suppose que les mesures se trouvent aux intersections de la grille de points, précisément où les points de phase doivent être reconstruits :

$$\frac{1}{2} (s_x^S[m, n + 1] + s_x^S[m, n]) = \frac{1}{d} (\phi[m, n + 1] - \phi[m, n]), \quad (3.27a)$$

pour  $m \in [1, N - 1], n \in [1, N]$  et

$$\frac{1}{2} (s_y^S[m + 1, n] + s_y^S[m, n]) = \frac{1}{d} (\phi[m + 1, n] - \phi[m, n]), \quad (3.27b)$$

pour  $m \in [1, N], n \in [1, N - 1]$ . Ce modèle point à point néglige, comme celui de Hudgin, la moyenne aux bords de la sous-pupille [Eqs. (3.5-3.6)].

#### Exemple : Représentation matricielle des opérateurs de Hudgin et Fried.

Les matrices D pour le problème direct de l'Eq. (3.7) sont creuses comme le montre l'exemple sur la Fig. 3.5

◀

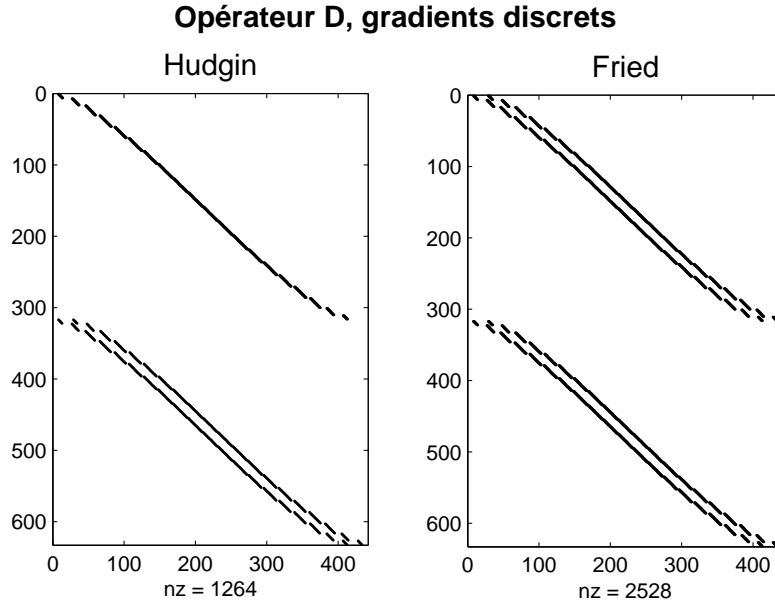


FIG. 3.5 – Matrices D et N, avec modèle de mesure de Fried [Eq. (3.26)]. Représentation zonale pour un système avec  $20 \times 20$  sous-pupilles, dont 316 valides dans la pupille principale. Les 357 actionneurs valides sont placés aux coins des sous-pupilles.

### 3.4 Modélisation du problème direct dans le domaine des fréquences spatiales (ou de Fourier)

L'objectif de cette section est de présenter la modélisation du problème de reconstruction statique de front d'onde dans l'espace des fréquences spatiales. L'utilisation d'algorithmes numériques rapides, plus précisément de la transformée de Fourier rapide (FFT), est sous-entendue en vue de la décroissance du coût calculatoire global.

Bien que l'analyse se focalise sur l'ASO HS, les mêmes formulations s'appliquent aussi à d'autres ASO dont les mesures sont quasiment le champ des gradients de phase. Ce travail développé en collaboration, est présenté dans l'article [Quirós-Pacheco *et al.*, 2009].

Les ouvrages [Oppenheim et Willsky, 1997, Oppenheim et Schafer, 1999] servent de base à l'analyse développée dans cette section.

A partir des Eqs. (3.5 - 3.6), le fonctionnement théorique du HS consiste à prendre la différence de la phase moyenne aux bords de la sous-pupille. Cette moyenne se calcule par convolution par une fonction « porte » de largeur  $d$

$$f_{\square}(x) = \begin{cases} 1/d & \text{si } x \in [-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}]; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.28)$$

Puisque l'échantillonnage est effectué aux coins et non au centre des côtés de la sous-pupille, un décalage additionnel de  $d/2$  est ensuite appliqué.

En s'appuyant sur les propriétés de la transformée de Fourier et sur des paires de transformées

standard, la représentation des Eqs. (3.5-3.6) peut s'écrire sous la forme

$$s_x = \downarrow \frac{1}{d} \left( \phi(x, y) \star \mathcal{F}^{-1} \left\{ e^{-\pi i d \nu_y} \text{sinc}(d \nu_y) \left( e^{2\pi i \nu_x d} - 1 \right) \right\} \right) \quad (3.29a)$$

$$s_y = \downarrow \frac{1}{d} \underbrace{\left( \phi(x, y) \star \mathcal{F}^{-1} \left\{ e^{-\pi i d \nu_x} \text{sinc}(d \nu_x) \left( e^{2\pi i \nu_y d} - 1 \right) \right\} \right)}_{(1)} \underbrace{\hspace{1cm}}_{(2)} \underbrace{\hspace{1cm}}_{(3)} \underbrace{\hspace{1cm}}_{(4)} \underbrace{\hspace{1cm}}_{(5)} \quad (3.29b)$$

pour les directions  $x$  et  $y$ , respectivement. La fonction sinus-cardinal est définie par

$$\text{sinc}(x) \triangleq \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}. \quad (3.30)$$

La transformée de Fourier de la fonction  $f_{\square}(x)$  de l'Eq. (3.28), est  $\text{sinc}(d \nu_x)$ . La correspondance des termes des Eqs.(3.29a-3.29b) est immédiate :

- (1) échantillonnage spatial
- (2) convolution de la phase par un opérateur représentant le HS
- (3) décalage d'une demi sous-pupille en direction perpendiculaire à celle de la mesure,
- (4) moyenne sur un segment de largeur  $d$ ,
- (5) différence de la moyenne sur les deux côtés opposés de la sous-pupille.

### 3.4.1 Modèle de mesure complet dans le domaine des fréquences spatiales

Pour permettre l'utilisation de la transformée de Fourier discrète (TFD) avec support borné (nombre fini de points) et donc permettre d'estimer la phase à partir d'un jeu fini de mesures, on est conduit à poser l'hypothèse suivante.

**Hypothèse 3.1** *La phase atmosphérique  $\phi$  est à bande limitée*

$$\Phi(\nu_x, \nu_y) = \mathcal{F}\{\phi(x, y)\} = 0, |\nu_x|, |\nu_y| > \frac{1}{2d}, \quad (3.31)$$

et périodique

$$\phi(x, y) = \phi(x + \alpha L, y + \beta L), \alpha, \beta \in \mathbb{Z}. \quad (3.32)$$

□

Cette hypothèse n'est pas plus réaliste que l'hypothèse sous-jacente à la géométrie de Fried, où le modèle est exact pour une phase décrite sur une base de fonctions bilinéaires. Il s'agit d'une formulation alternative, où la phase est cette fois-ci représentée sur une base de sinus cardinaux.

**Remarques :** La phase réelle n'est ni périodique ni à bande limitée. Malgré cela, sachant que le spectre spatial de la phase est  $\propto \nu^{-11/3}$ , pour un échantillonnage  $d$  suffisamment petit le repliement tend à être négligeable. A cet égard, se référer à la Fig. 2.17. ◀

Puisque la phase est supposée à bande limitée et bien échantillonnée, alors une version discrétisée tous les  $d$  mètres est suffisante pour estimer exactement la phase continue, non périodique à partir de cet échantillon. En plus, cet échantillon n'est autre que les coefficients de fonctions sinus cardinaux normalisées centrées sur les points d'échantillonnage ; selon le théorème de Nyquist-Shannon, la phase continue non périodique est calculée par l'intégrale de convolution des échantillons par les

sinus-cardinaux. En conséquence on peut, sans perte d'information, reconstruire la phase  $\phi(x, y)$  en tout point à partir de ses échantillons sur le support  $L \times L$ . Soit  $\phi_e(x, y)$  cette phase échantillonnée qui vaut zéro en dehors des points d'échantillonnage. On a donc

$$\phi(x, y) = \phi_e(x, y) \star \text{sinc}(x, y). \quad (3.33)$$

Avoir un support borné avec un nombre fini de fréquences est essentiel pour être en mesure de pouvoir utiliser la TFD dans la reconstruction de phase à partir de ses pentes au moyen de techniques de filtrage.

Puisque la phase est aussi supposée périodique (second point de l'hypothèse 3.1), alors sa représentation dans l'espace des fréquences spatiales est discrète.

**Exemple :** Soit le cas mono-dimensionnel. Si  $\phi[m] \triangleq \phi(md)$  est une séquence d'échantillons d'une fonction continue, périodique et de bande limitée originale, échantillonnée en respectant le théorème de Nyquist-Shannon (c'est-à-dire qu'il n'y aura pas de repliement spatial, sous l'hypothèse 3.1) il en découle que la transformée de Fourier  $\Phi_k(\omega)$  de  $\phi[m]$  est périodique (car il s'agit d'une fonction échantillonnée) et discrète (puisque  $\phi$  est périodique) comme celle représentée sur la Fig. (3.6). ◀

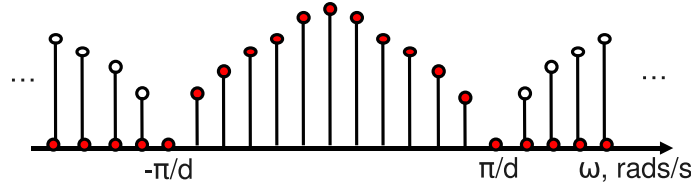


FIG. 3.6 – Illustration de la transformée de Fourier (TF) échantillonnée du signal continu  $\phi(x)$  (points rouges) et de la TF discrète de la séquence discrète périodique  $\phi[m]$  (cercles noirs). Une seule dimension considérée.

Ces propriétés permettent d'énoncer le résultat suivant.

**Propriété 3.1** La représentation des mesures HS des Eqs. (3.29a-3.29b) peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_x^r - \bar{\phi}_x^l &= \downarrow \frac{1}{d} \left( \phi(x, y) \star \mathcal{F}^{-1} \left\{ e^{-\pi i d \nu_y} \text{sinc}(d \nu_y) \left( e^{2\pi i \nu_x d} - 1 \right) \right\} \right) \\ &= \downarrow \frac{1}{d} \left( \phi_e(x, y) \star \text{sinc}(x, y) \star \mathcal{F}^{-1} \left\{ e^{-\pi i d \nu_y} \text{sinc}(d \nu_y) \left( e^{2\pi i \nu_x d} - 1 \right) \right\} \right) \\ &= \downarrow \frac{1}{d} \left( \phi_e(x, y) \star \mathcal{F}^{-1} \left\{ \text{rect}(d \nu_x) \text{rect}(d \nu_y) e^{-\pi i d \nu_y} \text{sinc}(d \nu_y) \left( e^{2\pi i \nu_x d} - 1 \right) \right\} \right), \end{aligned} \quad (3.34)$$

où  $\text{rect}(d\nu)$  est une fonction porte de largeur  $1/d$  dans l'espace des fréquences spatiales. Cette fonction couvre la bande fréquentielle de  $\phi(x, y)$ .

Dans le but de renforcer le fait que les pentes sont les différences premières des moyennes aux bords des sous-pupilles, la notation  $s_x = \bar{\phi}_x^r - \bar{\phi}_x^l$  est utilisée.

A partir de l'hypothèse 3.1, suite à la décomposition spectrale de  $\phi$ , les fréquences qui ont un coefficient différent de zéro sont celles de la série de Fourier, soit  $f_k = \frac{k}{N} \frac{1}{d}$ ,  $f_l = \frac{l}{N} \frac{1}{d}$ , avec bande

passante de  $\frac{-1}{2d} \leq f_k, f_l \leq \frac{1}{2d}$ . En remplaçant  $\nu_x$  et  $\nu_y$  à l'Eq. (3.34) par  $f_k$  et  $f_l$  il vient

$$\boxed{\bar{\phi}_x^r - \bar{\phi}_x^l = \frac{1}{d} \phi[m, n] \star \mathbf{TF}^{-1} \left\{ e^{\frac{-\pi i l}{N}} \text{sinc} \left( \frac{l}{N} \right) \left( e^{\frac{2\pi i k}{N}} - 1 \right) \right\}, \quad \text{Modèle mesure en Fourier}} \quad (3.35)$$

où on a le droit de remplacer la transformée de Fourier continue par la transformée de Fourier discrète car les coefficients hors bande sont nuls.  $\triangle$

#### Démonstration : Equation de mesure exacte dans le domaine des fréquences spatiales.

L'équation (3.35) revient à discrétiser directement l'Eq. (3.29) sous l'hypothèse d'une phase périodique et à bande limitée à la fréquence de Nyquist-Shannon. On peut le voir facilement en remarquant que comme la partie fréquentielle de l'Eq. (3.34) est nulle en dehors de  $[-1/(2d), 1/(2d)]$  les  $\text{rect}(\cdot)$  disparaissent dans une transformation en TFD.  $\blacksquare$

Le modèle de mesure dans l'espace de Fourier s'écrit alors

$$\mathbf{S}_x^E[k, l] = \frac{1}{d} \Phi[k, l] e^{\frac{-\pi i l}{N}} \text{sinc} \left( \frac{l}{N} \right) \left( e^{\frac{2\pi i k}{N}} - 1 \right), \quad (3.36a)$$

$$\mathbf{S}_y^E[k, l] = \frac{1}{d} \Phi[k, l] e^{\frac{-\pi i k}{N}} \text{sinc} \left( \frac{k}{N} \right) \left( e^{\frac{2\pi i l}{N}} - 1 \right), \quad (3.36b)$$

où la notation  $\mathbf{S}_x[k, l] = \mathbf{TF}\{s_x\}$  et  $\mathbf{S}_y[k, l] = \mathbf{TF}\{s_y\}$  est adoptée pour les transformées de Fourier des mesures.

La représentation du filtre donné à l'Eq. (3.36) dans l'espace direct n'est pas creuse car les mesures ne dépendent plus du gradient local de la phase mais, par le biais de la fonction « porte », de la phase étendue sur la totalité du support  $L \times L$ . Les filtres des modèles creux de la section 3.3.1.1 sont présentés dans la section suivante.

### 3.4.2 Représentation de Fourier des modèles simplifiés de l'ASO HS

Les modèles de mesure de Hudgin, Fried et Southwell (décrits à la section 3.3.1.1) sont maintenant réécrits dans l'espace des fréquences spatiales. La Fig. (3.4) schématise leur principe d'opération.

#### 3.4.2.1 Hudgin

Pour la géométrie de Hudgin, le modèle de mesure dans l'espace de Fourier s'écrit

$$\mathbf{S}_x^H[k, l] = \frac{1}{d} \Phi[k, l] \left( e^{i \frac{2\pi k}{N}} - 1 \right), \quad (3.37a)$$

$$\mathbf{S}_y^H[k, l] = \frac{1}{d} \Phi[k, l] \left( e^{i \frac{2\pi l}{N}} - 1 \right). \quad (3.37b)$$

**Démonstration :** La démonstration complète se trouve dans [Freischlad et Koliopoulos, 1986].  $\blacksquare$



### 3.4.2.2 Fried

Pour la géométrie de Fried, la moyenne aux bords est remplacée par une moyenne sur deux points placés aux coins de la sous-pupille. Ceci conduit au modèle

$$\mathbf{S}_x^F[k, l] = \frac{1}{2d} \Phi[k, l] \left( e^{i \frac{2\pi k}{N}} - 1 \right) \left( 1 + e^{-i \frac{2\pi l}{N}} \right), \quad (3.38a)$$

$$\mathbf{S}_y^F[k, l] = \frac{1}{2d} \Phi[k, l] \left( e^{i \frac{2\pi l}{N}} - 1 \right) \left( 1 + e^{-i \frac{2\pi k}{N}} \right). \quad (3.38b)$$

**Démonstration :** La démonstration complète se trouve dans [Poyneer *et al.*, 2002]. ■

### 3.4.2.3 Southwell

La géométrie de Southwell suppose les pentes aux coins des sous-pupilles. Le modèle dans l'espace des fréquences spatiales s'écrit :

$$\mathbf{S}_x^S[k, l] = \frac{1}{d} \Phi[k, l] \left( -i \sin \left( \frac{2\pi k}{N} \right) \right), \quad (3.39a)$$

$$\mathbf{S}_y^S[k, l] = \frac{1}{d} \Phi[k, l] \left( -i \sin \left( \frac{2\pi l}{N} \right) \right). \quad (3.39b)$$

**Démonstration :** La démonstration complète se trouve dans [Correia *et al.*, 2008a]. ■

### 3.4.2.4 Augmentation de la conformité des modèles au HS – décalages latéraux

Afin d'augmenter la corrélation des pentes du HS avec les pentes théoriques des modèles creux des décalages latéraux additionnels peuvent être rajoutés au modèle direct. Ceci résulte en un modèle qui se rapproche au mieux du réel fonctionnement de l'ASO.

En espace de Fourier, les décalages se traduisent par une multiplication par

$$e^{i \frac{2\pi}{N} (h_s \cdot k + v_s \cdot l)}, \quad (3.40)$$

où  $h_s$  et  $v_s$  sont les décalages horizontal et vertical respectivement en unités de sous-pupilles. A titre d'exemple, un décalage horizontal en  $x$  additionnel d'une sous-pupille correspond à  $h_s = 1$  et  $v_s = 0$ .

Théoriquement, pour la géométrie de Fried ces décalages sont nuls alors que pour celle de Hudgin on a  $h_s = 0$  et  $v_s = 1/2$  pour les pentes horizontales en  $x$  et  $h_s = 1/2$  et  $v_s = 0$  pour les pentes verticales en  $y$ . Intuitivement, pour la géométrie de Southwell un décalage  $h_s = 1/2$  et  $v_s = 1/2$  pour les pentes en  $x$  et  $y$  est adopté. Les simulations numériques mises en place confirment ce choix.

## 3.5 Le problème inverse de reconstruction dans le domaine des fréquences spatiales

La réduction du coût calculatoire des algorithmes de reconstruction en OA a fait l'objet de plusieurs travaux de recherche. L'aspect commun de tous les travaux groupés ci-après est la modélisation directe de la mesure avec des modèles creux présentés à la section 3.3.1.1. La distinction réside dans la méthode utilisée lors de l'inversion du problème direct. Une synthèse actuelle de la littérature sur ce sujet est présentée par [Ellerbroek et Vogel, 2009]. Cette thématique est traitée dans les ouvrages de référence [Roggemann et Welch, 1996], [J.W.Hardy, 1998] et [Rodier, 1999].

Dans cette section, l'inversion du problème dans l'espace des fréquences spatiales est exposée, avec la dérivation des filtres moindres carrés et à variance minimale. L'adaptation de l'algorithme par FFT – l'implantation rapide de la TFD – aux mesures réalisées sur la pupille annulaire du télescope est décrite à la section 3.5.3. Une nouvelle approche itérative est proposée, basée sur l'algorithme d'extrapolation spectrale de [Gerchberg, 1974]. Options de filtrage rapide de modes non-vus et modes parasites est effectuée à la section 3.5.4. Enfin, la section 3.5.5 explicite l'obtention de la phase estimée à haute-résolution à partir de l'estimée basse résolution.

### 3.5.1 Reconstruction moindres carrés sur les données

Les Eqs. (3.25-3.27) et (3.35) se présentent sous la forme du produit d'un terme lié au gradient spatial  $\mathbf{G}_{x,y}[k, l]$  par un terme  $\mathbf{M}_{x,y}[k, l]$ , lié à la fonction moyenne (convolution par la fonction « porte »  $f_{\square}$  de l'Eq. (3.28)). Ces deux termes dépendent du filtre spécifique que l'on veut utiliser.

En utilisant les propriétés de la transformée de Fourier, la minimisation du critère des moindres carrés de l'Eq. (3.9) est obtenue en isolant, fréquence par fréquence, la phase dans les équations de mesure Eqs. (3.25-3.27). Ceci conduit aux filtres  $\mathbf{R} = (\mathbf{R}_x, \mathbf{R}_y)$ , souvent appelés « filtres inverses », sous la forme

$$\mathbf{R}_x[k, l] = \frac{\mathbf{Q}_x^H}{|\mathbf{Q}_x|^2 + |\mathbf{Q}_y|^2} = \frac{\mathbf{G}_x^H[k, l]\mathbf{M}_x^H[k, l]}{|\mathbf{G}_x[k, l]\mathbf{M}_x[k, l]|^2 + |\mathbf{G}_y[k, l]\mathbf{M}_y[k, l]|^2}, \quad (3.41a)$$

$$\mathbf{R}_y[k, l] = \frac{\mathbf{Q}_y^H}{|\mathbf{Q}_x|^2 + |\mathbf{Q}_y|^2} = \frac{\mathbf{G}_y^H[k, l]\mathbf{M}_y^H[k, l]}{|\mathbf{G}_x[k, l]\mathbf{M}_x[k, l]|^2 + |\mathbf{G}_y[k, l]\mathbf{M}_y[k, l]|^2}, \quad (3.41b)$$

où  $\mathbf{Q}_x \triangleq \mathbf{G}_x[k, l]\mathbf{M}_x[k, l]$  et  $\mathbf{Q}_y \triangleq \mathbf{G}_y[k, l]\mathbf{M}_y[k, l]$  sont définis sur le tableau 3.1 pour les filtres correspondant aux géométries de la section 3.3.1.1.

TAB. 3.1 – Filtrage des quatre géométries utilisées : Exacte, Hudgin, Fried, Southwell.

Filtre	$\mathbf{G}_x^H$	$\mathbf{G}_y^H$	$\mathbf{M}_x$	$\mathbf{M}_y$
Exact	$\left(e^{(-i\frac{2\pi}{N}k)} - 1\right)$	$\left(e^{(-i\frac{2\pi}{N}l)} - 1\right)$	$\text{sinc}\left(\frac{l}{N}\right)e^{(-i\frac{\pi}{N}l)}$	$\text{sinc}\left(\frac{k}{N}\right)e^{(-i\frac{\pi}{N}k)}$
Fried	$\left(e^{(-i\frac{2\pi}{N}k)} - 1\right)$	$\left(e^{(-i\frac{2\pi}{N}l)} - 1\right)$	$\frac{1}{2}\left(1 + e^{(-i\frac{2\pi}{N}l)}\right)$	$\frac{1}{2}\left(1 + e^{(-i\frac{2\pi}{N}k)}\right)$
Hudgin	$\left(e^{(-i\frac{2\pi}{N}k)} - 1\right)$	$\left(e^{(-i\frac{2\pi}{N}l)} - 1\right)$	1	1
Southwell	$-i \sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$	$-i \sin\left(\frac{2\pi l}{N}\right)$	1	1

Avec  $\mathbf{S}_x[k, l] = \mathbf{TF}\{s_x\}$  et  $\mathbf{S}_y[k, l] = \mathbf{TF}\{s_y\}$  les transformées de Fourier des mesures, l'estimée

de la phase au sens moindres carrés s'écrit

$$\hat{\Phi}_{\text{LS}}[k, l] = \begin{cases} 0 & \text{si } k, l = 0; \\ \mathbf{R}_x[k, l]\mathbf{S}_x[k, l] + \mathbf{R}_y[k, l]\mathbf{S}_y[k, l] & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.42)$$

**Remarques :** Le filtre « exact » dérivé ici est identique à celui présenté par [Poyneer et V\'eran, 2005]. Pour trouver le leur, il faut utiliser la relation de Euler, s\'eparer les parties r\'eelle et imaginaire puis simplifier en utilisant des relations trigonom\'etriques. L'int\'er\^et de l'approche pr\'esent\'ee ici est de justifier le filtre « exact » sous certaines hypoth\`eses sur la phase [cf. §3.4.1].

Vis-à-vis du filtre de Fried, le filtre « exact » n'a plus de p\^ole à la fr\'equence du mode gaufre. ◀

### 3.5.2 Reconstruction r\'egularis\'ee - le filtre MMSE de Wiener

Les limitations du reconstituteur moindres carrés ont été d\'ejà \\'evoqu\'ees. Cela reste vrai qu'il s'agisse d'une base de polyn\^omes de Zernike ou de fonctions de la s\'erie de Fourier. Prendre en compte les informations *a priori* que l'on poss\`ede sur la phase et le bruit tend à am\'eliorer la reconstruction de phase. Le crit\`ere MMSE de l'Eq. (3.12) admet pour solution le filtre de [Wiener, 1949], en supposant que la phase et le bruit sont stationnaires et que les moments du deuxi\`eme ordre sont connus :

$$\hat{\Phi}_{\text{MMSE}} = \frac{\mathbf{Q}_x^H \mathbf{S}_x + \mathbf{Q}_y^H \mathbf{S}_y}{|\mathbf{Q}_x|^2 + |\mathbf{Q}_y|^2 + \gamma \frac{\mathbf{W}_w}{\mathbf{W}_\phi}}. \quad \text{Filtre à variance minimale de Wiener} \quad (3.43)$$

Les spectres  $\mathbf{W}_w$  et  $\mathbf{W}_\phi$  [Eq. (2.15)], sont la densit\'e spectrale de puissance du bruit et de la phase respectivement.

Comme pr\'ecedemment, le bruit est suppos\'e blanc, de distribution gaussienne et ind\'ependant entre sous-pupilles, *i.e.*  $\mathbf{W}_w \propto \rho I$ ,  $\rho \in \mathbb{R}$  une constante arbitraire. Un facteur d'\`echelle scalaire  $\gamma$  a \\'et\'e introduit dans l'Eq. (3.43) pour r\'egler le poids de la r\'egularisation afin de prendre en compte d'autres sources de bruit n\'eglig\'ees dans ce formalisme<sup>5</sup>. Le terme  $\frac{\mathbf{W}_w}{\mathbf{W}_\phi}$  peut s'interpr\'eter comme l'inverse du rapport signal sur bruit (RSB). Pour des fr\'equences o\`u le niveau de bruit est plus important que le niveau du signal de phase, le filtre adopte une estim\'ee nulle, c'est-à-dire  $\frac{\mathbf{W}_w}{\mathbf{W}_\phi} \rightarrow \infty$  alors  $\hat{\Phi} \rightarrow 0$ . En r\'egime de fort RSB il vient  $\frac{\mathbf{W}_w}{\mathbf{W}_\phi} \approx 0$  et par cons\'equent le filtre de Wiener tend vers le filtre moindres carrés de l'Eq. (3.42). Les effets du repliement fr\'equentiel ne peuvent cependant pas \^etre pris en compte par ce filtrage lin\'eaire. En adoptant  $\mathbf{W}_w \neq \rho I$  une certaine prise en compte du repliement est possible [Neichel *et al.*, 2009].

**Remarques :** Malgr\'e l'existence d'un p\^ole à la fr\'equence nulle, ceci n'impacte pas la performance des syst\`emes d'OA. Le filtrage de Wiener permet d'\`eliminer les p\^oles à la fr\'equence du mode gaufre et ainsi r\'eduire les pertes de performance et cons\'equence propagation de bruit à cette fr\'equence. ◀

### 3.5.3 Extension des pupilles circulaires aux pupilles carr\'ees

Dans le contexte de l'OA, la pupille du t\'el\'escope restreint les limites physiques de la r\'egion sur laquelle les mesures sont effectu\'ees. Les gradients de phase sont ainsi disponibles sur toute la r\'egion pupillaire, de forme annulaire (circulaire le plus commun\'ement).

L'utilisation des transform\'ees de Fourier impose l'existence de mesures sur une r\'egion rectangulaire (carr\'ee dans la plupart des cas). Il faut donc adapter les mesures obtenues sur le syst\`eme d'OA à

<sup>5</sup>Notamment celles li\'ees aux extensions de pentes et au repliement spatial de la phase.

l'utilisation des transformées de Fourier discrètes car les supports sont pour l'heure différents. A cette fin, deux contraintes ont été identifiées :

- (i) La phase est périodique (au sens spatial du terme, cf. §3.4.1)

$$\boxed{\frac{1}{L} \int_L \nabla \phi dL = 0. \quad \text{Contrainte de périodisation}} \quad (3.44)$$

Autrement dit, l'intégrale du champ des gradients sur le support de largeur  $L$  doit être exactement zéro. Cette *circularisation*, proposée par [Freischlad et Koliopoulos, 1986] est établie mathématiquement en imposant la somme des pentes en  $x$  ou  $y$  égale à zéro dans la direction  $x$  et  $y$  respectivement :

$$\sum_{n=1}^N s_x(m, n) = 0, \quad \sum_{m=1}^N s_y(m, n) = 0. \quad (3.45)$$

Pour une grille de  $N \times N$  point avec  $(N - 1) \times (N - 1)$  pentes, il en résulte que

$$s_x(m, N) = - \sum_{n=1}^{N-1} s_x(m, n), \quad 1 \leq m \leq N, \quad (3.46a)$$

$$s_y(N, n) = - \sum_{m=1}^{N-1} s_y(m, n), \quad 1 \leq m \leq N, \quad (3.46b)$$

une façon aisée de garantir la circularité de la phase. Pour éviter des sursauts abrupts aux bords  $s_x(m, N) \gg s_x(m, n < N)$ ,  $s_y(N, n) \gg s_y(m < N, n)$  des fonctions d'apodisation peuvent être envisagées. Celles-ci tendent à lisser le champ aux bords tout en garantissant la périodisation. Les résultats obtenus se trouvent dans [Correia et al., 2008a], mais ne sont pas utilisés ici.

- (ii) Le rotationnel du champ de gradients

$$\boxed{rot(\nabla \phi) = 0, \quad \text{Contrainte de rotationnel}} \quad (3.47)$$

en absence de bruit de mesure, doit être strictement égal à zéro à l'intérieur et à l'extérieur de la pupille. Par conséquent, la somme des gradients sur tout chemin fermé (reliant quatre points de phase quelconques) doit impérativement être imposée nulle. Cette contrainte a été formalisée mathématiquement par [Herrmann, 1980] et ensuite utilisée par [Poyneer et al., 2002]. Physiquement elle impose tout simplement la continuité spatiale de la phase.

### 3.5.3.1 Application des contraintes d'extension aux modèles du HS

**Géométrie Exacte :** Pour la géométrie « exacte » [cf. §3.4.1] on propose une méthode itérative décrite en détail à la section 3.5.3.2. Cette méthode permet de garantir que le rotationnel du champ de gradients est aussi proche de zéro que possible tout en imposant la circularisation de phase. Ce type d'extension, basé sur l'extrapolation du contenu spectral des pentes est général et peut donc être appliqué à n'importe quelle géométrie de mesure [section 3.7].

**Géométrie de Fried :** Pour la géométrie de Fried, [Correia et al., 2007] ont explicitement résolu l'application de la contrainte (ii.) ci-dessus. Cette géométrie suppose que la pente se trouve au milieu de la sous-pupille (calculée en prenant la moyenne aux bords – Eq. (3.26)) ; le calcul du rotationnel

est effectué sur des pentes reliant des points de phase, ceux-ci situés aux coins des sous-pupilles. Par conséquent, l'application de la contrainte (ii.) sur des pentes qui relient directement des points de phase, conduit à

$$\begin{aligned} 0 &= s_x[m, n] + s_x[m, n+1] + s_y[m, n+1] + s_y[m+1, n+1] \\ &\quad - s_x[m+1, n+1] - s_x[m+1, n] - s_y[m+1, n] - s_y[m, n], \\ 1 &\leq m \leq N-1, 1 \leq n \leq N-1. \end{aligned} \quad (3.48)$$

où la condition identifiée fait intervenir quatre sous-pupilles. Ceci permet d'établir une équation sur les pentes extérieures de l'ensemble de  $2 \times 2$  sous-pupilles puisque les pentes intérieures s'annulent. La Figure 3.7 schématise le principe d'opération. Les détails de l'implantation de l'Eq. (3.48), méthode dénommée « mesh2x2 », se trouvent dans [Correia et al., 2008a].

Toutefois, la contrainte ne peut pas être imposée aux bords du support : il est intrinsèquement impossible d'imposer la circularisation en appliquant l'Eq. (3.48) et en même temps conserver le rotationnel égal à zéro. La priorité est donnée à la circularisation car en son absence des erreurs sur les basses fréquences sont produites, contrairement au rotationnel qui crée des erreurs haute fréquence. Cela va donner naissance à une erreur additionnelle qui sera évaluée ensuite par simulations numériques.

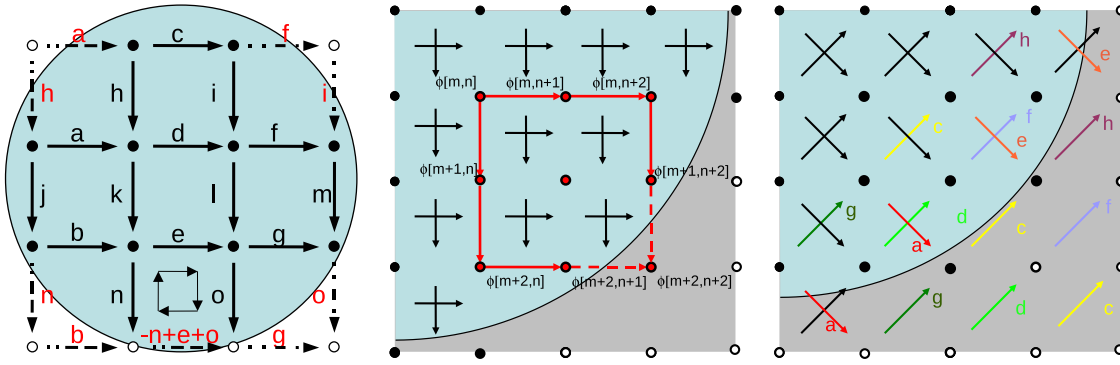


FIG. 3.7 – (Gauche) Géométrie de Hudgin ; les pentes sont recopiées vers l'extérieur de la pupille, comme l'exemple le montre. Un cas spécial : la sous-pupille en bas au centre exhibe trois pentes (seul la sous-pupille fictive en bas est inexistante (voir la Fig. 3.4 pour plus de détails). Pour ce cas la somme indiquée doit être réalisée, et d'ailleurs pour toute situation identique au bord de la pupille du télescope.

(Centre) : Géométrie de Fried : l'application de la contrainte décrite par l'Eq. (3.26) est réalisée comme le montre la figure.

(Droite) : Extension des pentes pour la configuration de Fried avec pentes recombinaées, proposée par [Freischlad et Koliopoulos, 1986]. Le rotationnel est en effet nul sur  $\Omega$  en procédant à l'extension proposée pour la géométrie sur des directions modifiées à  $45^\circ$ .

Les cercles noirs correspondent aux points de phase à l'intérieur de la pupille et les circonférences aux points à l'extérieur.

L'imposition de cette contrainte aux pentes horizontales et verticales évite la recombinaison des pentes en  $x$  et en  $y$  sur des directions inclinées à  $45^\circ$ . Cette solution a été proposée par [Freischlad et Koliopoulos, 1986]. De même, ceci évite la reconstruction qui s'en suit sur deux grilles disjointes [Poyneer et al., 2002] qu'il faudrait par la suite recombinaer pour en avoir l'estimée finale.

En imposant les contraintes comme on le propose ici avec le filtre qui correspond à la géométrie de Fried il est possible de résoudre le problème d'estimation de phase de façon en tout point similaire à la géométrie de Hudgin, sans passer par des étapes de recombinaison et donc sans complexité de calcul supplémentaire. En tout cas, même en gardant les nouvelles pentes à  $45^\circ$ , la reconstruction de phase sur des grilles distinctes peut s'éviter en utilisant une méthode d'extension adaptée, décrite par [Correia *et al.*, 2007] et illustrée sur la Fig. 3.7-gauche.

**Géométrie de Hudgin :** Une méthode simple pour étendre les pentes en dehors de la pupille qui respecte entièrement les contraintes identifiées a été proposée par [Poyneer *et al.*, 2002] :

$$\begin{aligned} 0 &= s_x[m, n] + s_y[m, n + 1] - s_x[m, n + 1] - s_y[m, n], \\ 1 \leq m \leq N - 1, 1 \leq n \leq N - 1. \end{aligned} \quad (3.49)$$

La Fig. 3.7-gauche, précise la procédure spécifique à adopter pour la géométrie de Hudgin.

**Géométrie de Southwell :** L'extrapolation des pentes pour la géométrie de Southwell est tout à fait équivalente à celle adoptée pour la géométrie de Fried. Pour s'en convaincre, remplacer les pentes  $s_x$  and  $s_y$  par leurs valeurs données par les Eqs.(3.26-3.27). Ensuite, appliquer l'Eq. (3.48) et vérifier que la somme est en effet zéro. Comme précédemment la *circularisation* remplace la contrainte (ii) aux bords de la grille de reconstruction.

Ces contraintes restent vraies tant que la mesure est non bruitée. Dans la cas général avec bruit de mesure, il n'y a pas de raison concrète pour que les contraintes présentées soient vérifiées. Une composante à rotationnel non nul est rajoutée par ce bruit [Herrmann, 1980].

Une méthode alternative est la méthode d'extension « edge » proposée par [Poyneer et Véran, 2005] consistant à imposer uniquement la circularisation de la phase, le rotationnel étant laissé tel quel. Cette méthode a été développée pour le fonctionnement en boucle fermée où les mesures sont les pentes de la phase résiduelle, donc normalement très proches de zéro (selon les conditions d'observation, notamment fort RSB). La méthode consiste à égaliser la somme des pentes à zéro sur chaque ligne et colonne en faisant une répartition de la somme sur les deux côtés de la pupille. Cette méthode rend possible la mise en place d'un algorithme optimisé mode à mode car les modes de Fourier restent orthogonales sur la pupille. Toutefois, la méthode provoque une discontinuité du rotationnel du champ de gradients aux bords de la pupille du télescope. Cet effet est responsable de pertes considérables en boucle ouverte, mais reste raisonnable en boucle fermée, comme le montrent les auteurs cités.

Des méthodes alternatives doivent donc être mises en place. Empiriquement, la meilleure extension consisterait à étendre les pentes en dehors de la pupille en utilisant au mieux les informations spectrales des pentes mesurées et les informations *a priori* que l'on possède sur la phase et le bruit. C'est précisément l'objet de la section suivante.

### 3.5.3.2 Extrapolation spectrale itérative

La section précédente explicite la procédure à adopter pour étendre les mesures en dehors de la pupille du télescope. L'imposition conjointe des deux contraintes identifiées aux Eqs. (3.44) et (3.47) n'est mathématiquement exacte que pour la géométrie de Hudgin. Des résultats théoriques existent et sont proposées pour toutes les autres géométries.

Une méthode permettant d'étendre les mesures tout en gardant les contraintes (i.) et (ii.) est présentée dans cette section. Elle consiste à modifier l'algorithme de [Gerchberg, 1974], qui a été

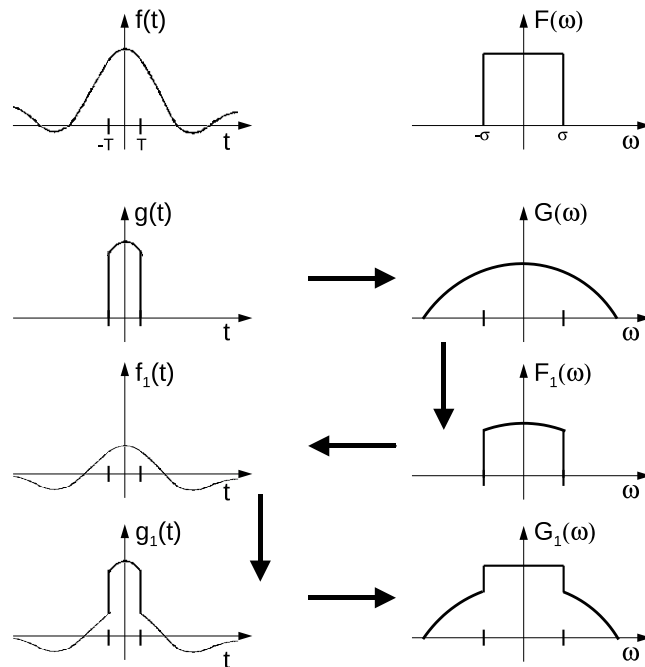


FIG. 3.8 – Illustration des étapes de l'algorithme de Gerchberg-Papoulis pour des fonctions à bande limitée. Ce schéma, inspiré de celui de [Papoulis, 1975], utilise, sans perte de généralité, des fonctions temporelles. Le nombre d'itérations croissant, la fonction reconstruite converge vers la fonction originale, ici  $f(t)$  où de façon équivalente  $F(\omega)$ .

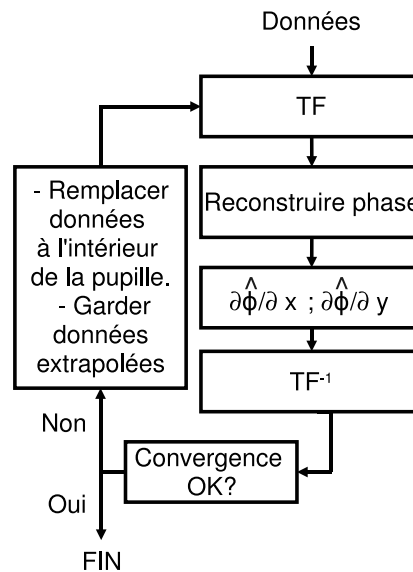


FIG. 3.9 – Étapes de l'algorithme de Gerchberg modifié.



conçu pour l'extrapolation spatiale et fréquentielle d'une fonction dont on ne connaît que des régions finies (dans l'espace direct et Fourier).

La Fig. 3.8, inspirée de celle présentée par [Papoulis, 1975] qui a ultérieurement analysé et optimisé l'algorithme de Gerchberg, schématise les étapes de l'algorithme.

L'algorithme de Gerchberg-Papoulis s'appuie sur des transformées de Fourier entre l'espace direct et l'espace des fréquences spatiales.

Dans sa version complète, cet algorithme consiste à mettre en place les opérations suivantes :

1. remplacer les pentes estimées dans l'espace direct par les pentes mesurées à l'intérieur de la pupille ; les pentes extrapolées sont gardées ;
2. transformée de Fourier directe ;
3. remplacer la portion du spectre au dessous de la fréquence de coupure par le spectre connu ; le spectre extrapolé reste gardé ;
4. transformée de Fourier inverse ; recommencer à nouveau à partir de (a) juste à ce que un critère d'arrêt soit franchi (par exemple : stagnation de la méthode, erreur en dessous d'un seuil prédéfini).

Ce n'est pas la première fois que cet algorithme est utilisé dans un contexte d'OA. Déjà [Roddier et Roddier, 1991] proposent son utilisation pour la reconstruction de phase à partir de mesures de courbure, mais aucune mise en œuvre éventuellement réalisée n'est connue.

Puisque l'algorithme de Gerchberg-Papoulis introduit des variations minimales d'énergie sur les données à bande limitée, (*i.e.* les DSP initiale et finale sont aussi proches que possible), il s'avère un moyen idéal pour créer des pentes dans des régions où elles sont inexistantes. Cette méthode impose des conditions aux bords pour résoudre l'équation de Poisson avec conditions limite de von Neumann (dérivée radiale aux bords nulle), et, du fait de l'utilisation de la TFD, la circularisation est directement imposée.

Dans un contexte d'OA, les données sont les pentes de la phase et non la phase elle même. Pour en tenir compte, deux étapes additionnelles sont incluses dans une version modifiée. Elles visent à reconstruire la phase bi-dimensionnelle à partir des pentes et, ensuite, à créer des mesures de pente à partir de la phase (selon un modèle à définir). La reconstruction (étape (2) de l'algorithme 1) utilise directement les filtres proposés ci-dessus, tandis que les pentes sont à nouveau obtenues à partir de la géométrie de Fried (étant celle qui se rapproche le plus du fonctionnement réel du HS tout en restant creuse) (étape (3) de l'algorithme 1). L'ensemble des opérations sont détaillées à l'algorithme 1.

**Entrée:** Mesures de l'analyseur

**pour chaque**  $m = 0, 1, \dots$ , **faire**

- 1 : Transformée de Fourier;
- 2 : Reconstruction de la phase;
- 3 : Calcul des gradients selon modèle *a priori*;
- 4 : Transformée de Fourier inverse;
- 5 : Convergence ? Si OUI  $\rightarrow$  FIN;
- 6 : Remplacer pentes à l'intérieur de la pupille par les pentes mesurées ;

**fin**

**Sortie:** FIN : Grille de pentes sur domaine  $N \times N$

**Algorithme 1:** Algorithme de Gerchberg modifié. Les pentes obtenues à la fin correspondent à une phase périodique et dont le rotationnel est d'autant proche de zéro que possible (bruit de mesure est tenu en compte).



La phase atmosphérique étant un phénomène à large bande, l'étape 3 de l'algorithme 1 a été enlevée. La Fig. 3.9 en schématise la procédure finale.

### 3.5.3.3 Récapitulatif des méthodes d'extension

Trois méthodes d'extension sont utilisées dans ce mémoire. Un récapitulatif est manifestement nécessaire.

1. « mesh2x2 », consiste à appliquer l'Eq. (3.48), pour résoudre un système linéaire pour des ensembles de 2-par-2 sous-pupilles – Fig. 3.7-centre.
2. « simple », proposée par [Poyneer *et al.*, 2002], définie par l'Eq. (3.49), consiste à recopier vers l'extérieur les pentes aux bords de la pupille du télescope – Fig. 3.7-gauche.
3. « modGerch », application de l'algorithme de Gerchberg-Papoulis modifié permettant l'extrapolation spectrale, schématisé à la Fig. 3.9.

### 3.5.4 Suppression des modes non-vus

Dans la section 3.2.3 les modes non-vus par le HS ont été identifiés et des méthodes d'élimination référencées. Un problème identique se retrouve dans le cadre de la reconstruction dans l'espace des fréquences spatiales. A première vue, l'élimination des modes de piston et gaufre pur aurait pu s'achever directement en espace de Fourier en spécifiant le coefficient de la fréquence nulle et  $1/(2d)$  à zéro. Cependant cela s'avère insuffisant car les fréquences dans le support rectangulaire des transformées ne correspondent pas exactement à la même fréquence dans le support annulaire. Donc, la reconstruction de front d'onde nécessite dans l'espace direct d'une opération supplémentaire d'atténuation de la présence parasite d'un résidu lié aux modes non vus.

L'élimination du mode piston est évidente ; elle consiste à soustraire la valeur moyenne de la phase reconstruite.

Pour le mode gaufre en général, une convolution par la fonction

$$G_l = \begin{bmatrix} 0,25 & -0,25 \\ -0,25 & 0,25 \end{bmatrix}, \quad (3.50)$$

proposée par [Poyneer, 2003] élimine avec efficacité le gaufre résiduel. Toutefois, l'application de ce filtre dont la représentation fréquentielle est plutôt concentrée aux hautes fréquences, n'est pas anodine pour les basses fréquences car le filtre recouvre en effet toute la plage fréquences. De ce fait, un aspect de lissage de la phase reconstruite est constaté, d'où résultent des effets potentiellement négatifs. Ce point est discuté en plus de détail dans [Correia *et al.*, 2008a].

### 3.5.5 Représentation continue de la phase

Dans le cadre de la reconstruction avec une base discrète de fonctions de Fourier, la phase n'est pas une fonction continue mais un jeu de coefficients sur une grille de  $N$  points. On souhaite utiliser une base de fonctions invariantes par translation, en analogie avec l'opération effectuée par le MD (celui-ci se comporte donc comme un interpolateur de phase). Si l'on considère que la bande fréquentielle des fonctions de la base ne dépasse pas la bande de celle-ci, alors

$$\phi[m, n] = u[m, n] \star \text{IF}[m, n], \quad (3.51)$$

IF étant une fonction d'influence, avec la même résolution que la phase.

Dans l'espace de Fourier les coefficients des ces nouvelles fonctions se trouvent à partir de

$$u = \mathbf{TF}^{-1} \frac{\Phi}{\mathbf{IF} + \mathbf{K}}, \quad (3.52)$$

où  $\Phi$  est la transformée de la phase discrète,  $\mathbf{IF}$  est la transformée de Fourier de la fonction d'influence  $\mathbf{IF}$  centrée.

**Démonstration :** La représentation de l'Eq. (3.51) consiste en effet à un produit de convolution des coefficients zonaux par une base de fonctions normalisées. Une telle convolution devient alors une multiplication dans l'espace de Fourier. Ceci dit, une simple opération de filtrage doit donc être mise en place sous la forme

$$u = \mathbf{TF}^{-1} \left\{ \frac{\mathbf{IF}^H}{|\mathbf{IF}|^2} \Phi \right\} \quad (3.53)$$

L'Eq. (3.53) en découle immédiatement en multipliant par  $1/\mathbf{IF}^H$  et notant que  $\mathbf{IF}^H \mathbf{IF} = |\mathbf{IF}|^2$ . Le terme  $\mathbf{K}$  est une fonction de régularisation bidimensionnelle qui tend à pénaliser l'amplification exagérée de fréquences non désirées. ■

La phase  $\phi(x, y)$  à haute résolution, voire continue, s'obtient en faisant

$$\phi(x, y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \phi[m, n] \mathbf{IF}_{m,n}(x, y). \quad (3.54)$$

### 3.5.6 Coefficients de propagation du bruit

On s'intéresse ici aux pupilles annulaires avec extension de pentes en dehors de la pupille. Les coefficients de propagation de bruit sont définis par

$$\eta_b \triangleq \frac{\sigma_{bp}^2}{\sigma_w^2}, \quad (3.55)$$

où  $\sigma_{bp}^2$  est la variance du bruit propagé. Ce coefficient peut se calculer analytiquement à partir de l'expression

$$\eta_\epsilon = \frac{1}{N^2} \left[ \underbrace{\text{trace} \left\{ (\mathbf{RD} - \mathbf{I}) \Sigma_\phi \left( (\mathbf{RD})^T - \mathbf{I} \right) \right\}}_{\eta_\phi} + \underbrace{\text{trace} \left\{ \mathbf{R} \Sigma_w \mathbf{R}^T \right\}}_{\sigma_{bp}^2 = \sigma_w^2 \eta_b} \right], \quad (3.56)$$

où la première composante est le terme de biais et la deuxième un terme lié au bruit de mesure. Le bruit de mesure est considéré indépendant entre sous-pupilles et de variance égale. Donc  $\Sigma_w = \sigma_w^2 \mathbf{I}$ , avec  $\sigma_w^2$  la variance de bruit sur les sous-pupilles parfaitement éclairées.

L'Eq. (3.56) définit une expression linéaire du type

$$\eta_\epsilon = \eta_\phi + \sigma_w^2 \eta_b, \quad (3.57)$$

qui est à la fois fonction de la méthode de reconstruction (à travers  $\mathbf{R}$ ) et à la fois du modèle de mesure (à travers  $\mathbf{D}$ ).

Cependant, L'Eq. (3.55) n'admet pas de solution analytique simple quant il s'agit de la reconstruction dans l'espace des fréquences spatiales sur une pupille  $\Omega$  car les extensions ne sont pas simples à modéliser sous forme de matrice. A la section 3.7.6 l'Eq. (3.56) est statistiquement évaluée en procédant à un très grand nombre de tirages aléatoires.

Les courbes sur la Fig. 3.10 montrent les coefficients de propagation calculés analytiquement par [Hudgin, 1977], [Fried, 1977] et [Southwell, 1980] respectivement

Au moyen de simulations numériques, [Zou et Rolland, 2006] calculent explicitement les coefficients donnés par l'Eq. (3.55), en distinguant les valeurs de  $N$  paires et impaires pour les géométries de Fried, Hudgin et Southwell. Des variations considérables sont trouvées vis-à-vis des calculs théoriques sur la Fig. 3.10, le comportement logarithmique étant toujours présent. On s'attend donc, dans le cas particulier analysé ici, notamment puisque l'on considère les effets des extensions, à obtenir des variations par rapport aux lois de la Fig. 3.10. Cet aspect sera analysé en détail à la section 3.7.

Géométrie	Coefficients de propagation
Hudgin, 1997	$\eta_b^{Hud} = 0,561 + 0,103 \ln(N)$
Fried, 1977	$\eta_b^{Fri} = 0,6558 + 0,3206 \ln(N)$
Southwell, 1980	$\eta_b^{Sou} = -0,10447 + 0,2963 \ln(N)$

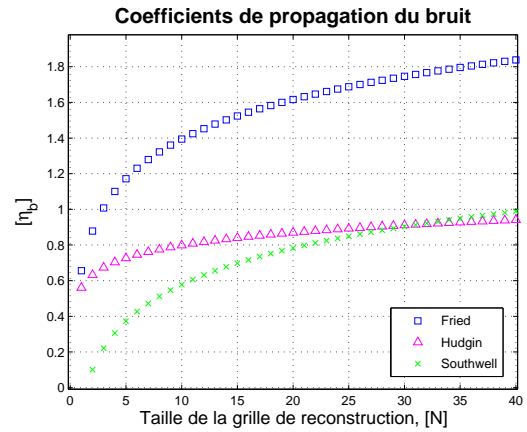


FIG. 3.10 – Coefficients de propagation du bruit correspondant aux lois sur le tableau à gauche.

### 3.6 Aperçu général des résultats des articles Correia et al., 2007 et Correia et al. 2008a

Les articles [Correia et al., 2007] et [Correia et al., 2008a] discutent de l'effet de la régularisation sur la performance des méthodes basées sur la FFT (alias FFTr). Un système de taille inférieure à celui considéré ici a alors été pris, avec 20x20 sous-pupilles.

Comme première observation, globalement la régularisation des filtres tend à améliorer les résultats surtout pour des observations avec étoile plus faible. Une adaptation à l'opération en boucle fermée a été proposée sur laquelle on reviendra à la section 3.8.

Dans [Correia et al., 2008a] plus précisément, l'algorithme de Gerchberg modifié est analysé. On constate qu'un nombre de 4 à 6 itérations est suffisant avant que la convergence ne stagne. Pour une étoile de magnitude  $m_v = 8$  les résultats sont déjà légèrement améliorés. Pour une étoile de magnitude  $m_v > 8$  l'amélioration apportée par l'extension itérative spectrale est plus importante, pouvant aller au-delà de 7% @2,2 $\mu$ m.

Cependant, les résultats obtenus par les simulations Monte Carlo montrent une performance inférieure de la géométrie de Hudgin vis-à-vis de celle de Fried car les décalages latéraux n'étaient alors pas optimisés. Cette optimisation est opérante ; elle rend en effet les géométries de Hudgin et Southwell beaucoup plus performantes, comme le montrent les résultats qui suivent.

### 3.7 Simulations Monte Carlo – résultats de reconstruction statique

La diversité des propositions pour modéliser le problème direct et pour, à partir de cela, formaliser le problème inverse sont comparées dans ce chapitre afin d'en déduire les avantages et inconvénients de leur utilisation. Pour simplifier la présentation, les résultats de cette section n'utiliseront que les versions à variance minimale des filtres de reconstruction.

Les résultats de performance sont présentés sous forme de rapport de Strehl et de FEP [section 2.4.1]. On ne va pas se concentrer sur la capacité d'estimation dans le cadre restreint où les données sont générées par des modèles directs que l'on propose ici, procédure communément dénommée par « crime inverse ». Ces algorithmes visent plutôt à être exploités en environnement temps réel avec des données réalistes délivrées par l'ASO HS. Ceci dit, la simulation numérique de Monte Carlo qui a été mise en œuvre génère les pentes bruitées à partir du modèle géométrique du HS avec échantillonnage spatial fin (plusieurs pixels par sous-pupille). Les algorithmes de reconstruction sont ensuite appliqués à de telles données pour en reconstruire la phase et obtenir les tensions à appliquer au MD pour la compenser.

Dans ce scénario, un système d'OA classique comptant 32-par-32 sous-pupilles est simulé, en se rapprochant du banc HOT<sup>6</sup> [Aller-Carpentier *et al.*, 2008] en cours de mise en œuvre dans les laboratoires de l'ESO. Une campagne de tests est prévue au début de l'année 2010 pour vérifier les prédictions numériques sur ce banc expérimental.

Sous les conditions présentées, plusieurs effets sont étudiés. D'abord, on analyse les méthodes d'extension « simple », « mesh2x2 », « Gerchberg modifié » à la section 3.7.2. Cette étude consiste à repérer la méthode d'extension la plus adaptée à chaque filtre. Ces simulations ne sont donc pas comparées aux résultats de la reconstruction par VMM (VMMr). Ensuite, pour la meilleur combinaison d'extension/filtre, l'effet du sous-éclairage est analysé à la section 3.7.3 ainsi que celui de l'occultation centrale à la section 3.7.4. Enfin à la section 3.7.5 l'impact de la magnitude de l'étoile utilisée pour l'analyse est quantifié. L'étude des méthodes de reconstruction par FFT (FFTr) se termine par une caractérisation des coefficients de propagation du bruit de mesure à la section 3.7.6 et enfin le calcul de la forme des FEP corrigées à la section 3.7.7.

Les résultats obtenus sont comparés à la VMMr consistant à prendre

$$\hat{\phi} = N \left( N^T N \right)^{-1} N^T \left( D^T \Sigma_w^{-1} D + \Sigma_{\phi}^{-1} \right)^{-1} D^T \Sigma_w^{-1} s, \quad (3.58)$$

où  $N$  est la matrice des modes d'interpolation utilisés à la section 3.5.5. La matrice de covariance de bruit est ici considérée  $\Sigma_w = \sigma_w^2 I$ , où  $\sigma_w^2$  est la variance du bruit sur chaque sous-pupille parfaitement éclairée.

Un point central qui mérite une justification particulière concerne le choix de simuler des systèmes en boucle ouverte sachant que la généralité des systèmes d'OA est asservie en boucle fermée. La raison en est simple : d'un côté on se place dans un scénario de reconstruction statique de front d'onde et donc les performances purement spatiales peuvent être quantifiées ; d'autre part on procède ainsi à une séparation nette des aspects spatiaux et des aspects temporels. L'adaptation de ces méthodes à la boucle fermée est abordée brièvement à la section 3.8.

#### 3.7.1 Paramètres de simulation

Les paramètres de simulation sont résumés dans le tableau 3.2.

---

<sup>6</sup>High-order test bench.

TAB. 3.2 – Paramètres de simulation. Les valeurs en gras repèrent les valeurs par défaut pour des paramètres dont la variation est testée par simulations de Monte Carlo. En gras les paramètres utilisés par défaut.

Paramètres de simulation		
Atmosphère	$C_n^2$	3 couches, {0,5;0,2;0,3}
	Vent	{10;5;15}ms <sup>-1</sup>
	Direction	{0;90;180} <sup>o</sup>
	No. modes	400
	$L_0$	25m
	$\lambda$	0,5 $\mu$ m
	seeing	0,65"
	$r_0@ 0,5\mu$ m	0.155m
	Résolution spatiale	0,05m
ASO	Type	géométrique
	Nb. sous-pupilles	32 (linéaire)
	Nb. pixels/sous-pupille	5
	Sous-éclairage	0,25- <b>0,5</b> -0,75-1
	$\lambda$	0,5 $\mu$ m
	Bruit lecteur	2e <sup>-</sup>
Interpolation	Type de fonctions	Gaussiennes
	Nb. de fonctions	21 (linéaire)
	Couplage (actionneur voisin)	0,2
Simulation	D	8m
	Occultation centrale	<b>0</b> -1,2-2,4m
	$T_s$	1ms
	Magnitude	<b>8</b> -9-10-11-12
	$\lambda_{sci}$	2,2 $\mu$ m
	$N$	$n_s + 2$
		→ grille étendue de 2 points

La phase turbulente est simulée par des écrans turbulents en translation sous l'hypothèse de Taylor [cf. § 2.3.1.2], générés à partir de la méthode de McGlamery [cf. § 2.4.2.1].

Les résultats de performance sont obtenus à défaut pour une source brillante de magnitude  $m_v = 8$  en terme de rapport de Strehl à  $2.2\mu\text{m}$ . Un système d'OA classique est simulé avec un miroir conjugué de la pupille au sol. Les actionneurs sont localisés aux coins des sous-pupilles, une disposition spatiale communément dénommée de « cartésienne ».

### 3.7.2 Performance optique en fonction des méthodes d'extension

Sur la Fig. 3.11 sont montrés les résultats en rapport de Strehl longue pose à  $2.2\mu\text{m}$ .

Le maximum global correspond à l'utilisation du filtre « exact ». Les filtres de Hudgin et Southwell atteignent aussi une performance comparable à la précédente car les décalages latéraux sont pris en compte et optimisés. Les simulations numériques confirment la prédiction théorique d'une demi sous-pupille d'écart [cf. §3.4.2.4].

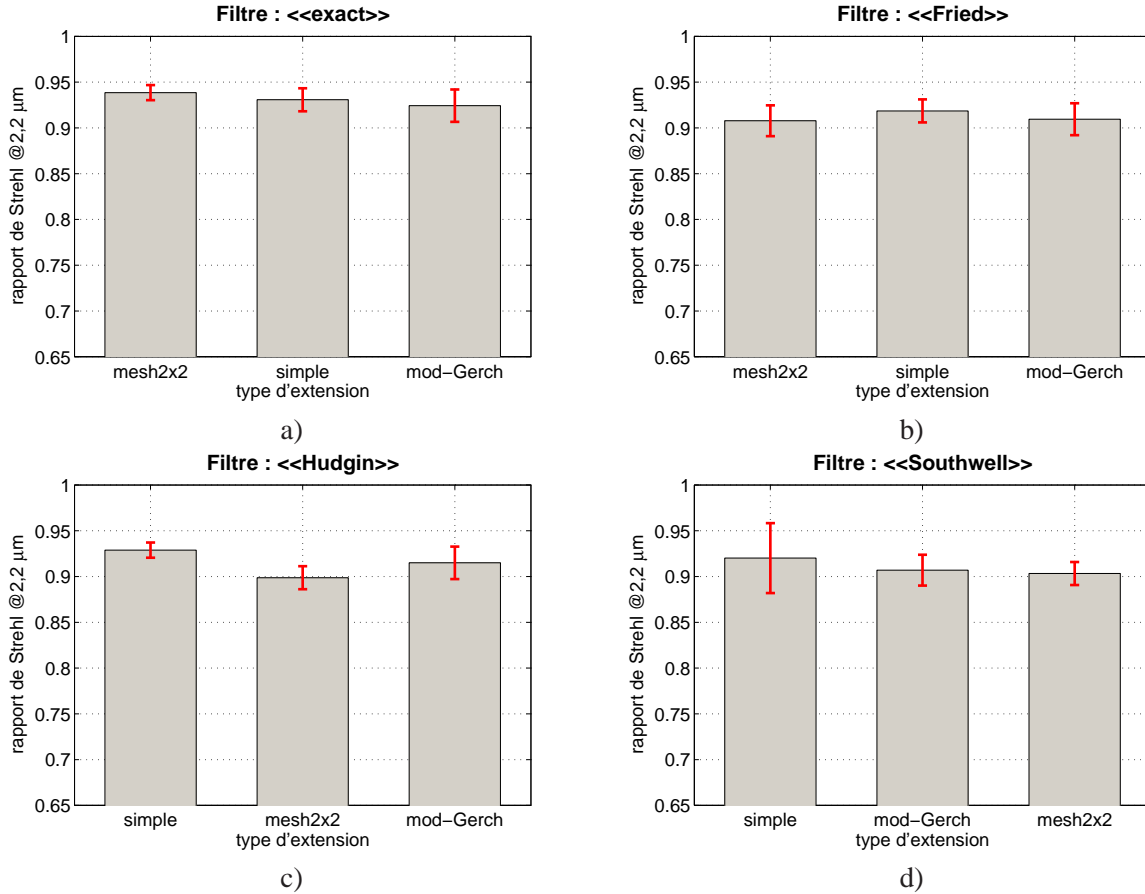


FIG. 3.11 – Performance en rapport de Strehl à  $2.2\mu\text{m}$  en fonction des méthodes d'extension pour les filtres a) « exact », b) « Fried », c) « Hudgin », d) « Southwell ». La colonne à gauche sur chaque figure correspond à l'extension naturelle adaptée à chaque filtre [§3.5.3]. Les barres en rouge représentent l'écart type sur 10000 tirages de phase. Les décalages spatiaux ont été optimisés, ce qui justifie les différences vis à vis des résultats présentés dans [Correia *et al.*, 2008a].

Ces résultats montrent aussi que la méthode d'extension naturelle d'une certaine géométrie peut ne pas s'avérer la plus adaptée en combinaison avec le filtre de reconstruction (voir correspondances géométrie/extension/filtre à la section 3.5.3).

Soit maintenant la méthode d'extension « mesh2x2 ». Quand utilisée avec le filtre « exact » la performance est maximisée. Toutefois une fois utilisée avec la géométrie de Fried (pour laquelle le calcul est théoriquement exact) une légère perte de performance par rapport à la méthode « simple » et « Gerchberg » est observée. L'explication en est la suivante : la méthode « 2x2mesh » introduit une quantité élevée de gaufre auquel la géométrie de Fried est aveugle. La phase reconstruite contient alors du gaufre en excès, d'où résulte la perte observée (voir aussi plus loin la Fig. 3.16).

Un point aussi remarquable que surprenant concerne la méthode d'extension « simple » : elle assure des niveaux de performance identiques au maximum et ce quel que soit le filtre choisi. Ceci s'ajoute aussi au fait suivant : étant la plus simple conceptuellement, la mise en œuvre est aussi la moins complexe au niveau calculatoire, surtout lorsqu'elle est comparée à la méthode de « Gerchberg ».

### 3.7.3 Effets du sous-éclairage

Les sous-pupilles sous-éclairées se trouvent aux bords extérieur et intérieur (si l'occultation centrale existe, ce qui en l'occurrence n'est pas le cas) de la pupille du télescope [section 2.5.1.1]. Ces sous-pupilles souffrent de mesures qui sont plus bruitées que les sous-pupilles totalement éclairées car la baisse du nombre de photons augmente le bruit – Fig. 3.14-droite.

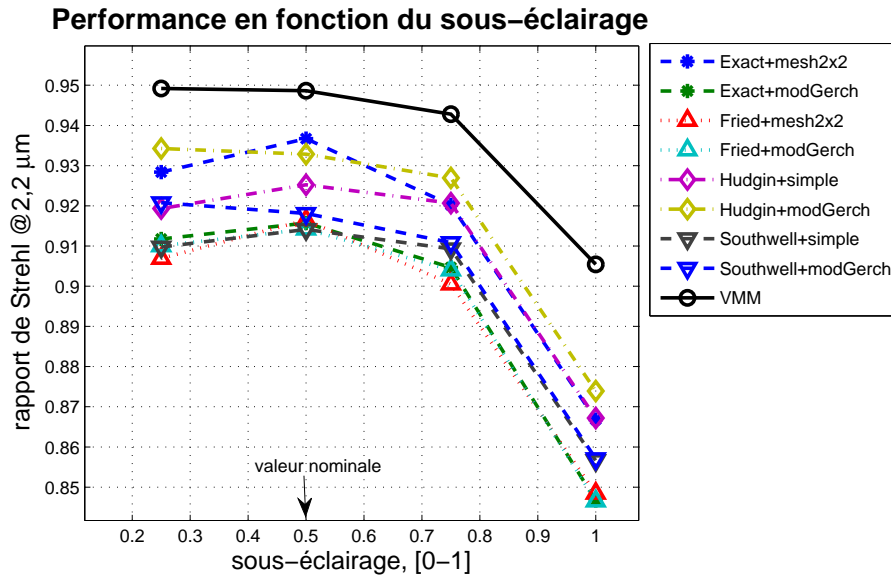


FIG. 3.12 – Performance en rapport de Strehl à  $2,2\mu\text{m}$  en fonction du niveau de sous-éclairage des sous-pupilles aux bords de la pupille du télescope. Pour un sous-éclairage de 1, les sous-pupilles participant à la mesure ne couvrent pas entièrement la pupille principale du télescope, ce qui se traduit par des pertes de performance. En l'occurrence, une perte d'environ 5% est observée pour les FFTr, étant moins accentuée pour la VMMr.

Sauf la méthode d'extension de Gerchberg, toutes les autres méthodes recopient les pentes aux

bords. Les pentes sur ces sous-pupilles étant plus bruitées, elles impactent de façon non prévisible la qualité de la reconstruction. On pouvait donc s'attendre à un meilleur comportement de la méthode d'extrapolation spectrale. Sur la Fig. 3.12 le rapport de Strehl est présenté en fonction de la valeur du sous-éclairage.

En moyenne la différence de rapport de Strehl se situe aux alentours de 2–4%, avec une différence plus marquée pour le cas où l'on ne prend que les sous-pupilles totalement éclairées.

Globalement, les FFTr et la VMMr présentent un comportement très similaire. La matrice de covariance du bruit de mesure a été prise pour la VMMr et FFTr égale à  $\Sigma_w = \sigma_w^2 \mathbf{I}$ , où  $\sigma_w^2$  est la variance de bruit d'une sous-pupille pleine. Les sous-pupilles sous-éclairées ne sont donc pas plus pénalisées en vertu de leurs mesures plus bruitées.

### 3.7.4 Effet de l'occultation centrale

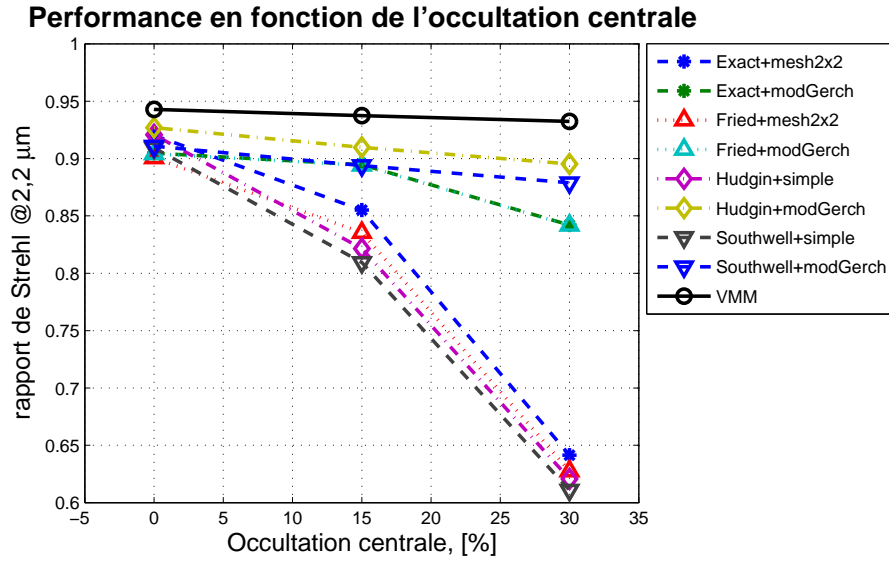


FIG. 3.13 – Performance en rapport de Strehl à  $2,2\mu\text{m}$  en fonction du pourcentage d'occultation centrale. L'algorithme d'extension de Gerchberg délivre les meilleurs performances car les contraintes d'extension sont imposées intrinsèquement, avec ou sans occultation centrale.

L'occultation centrale joue un rôle majeur en terme de reconstruction. Jusqu'à présent, les contraintes identifiées à la section 3.5.3 ont été appliquées à l'extension des pentes en dehors de la pupille vers l'extérieur. Or, avec une occultation centrale l'extension doit aussi se réaliser vers l'intérieur.

Naturellement, la méthode d'extension spectrale garantit un niveau de performance supérieur aux autres méthodes car les contraintes d'extension sont imposées intrinsèquement. La Fig. 3.13 montre les résultats comparatifs. Les quatre géométries utilisant la méthode d'extension spectrale présentent un comportement qui est similaire à la VMMr. Contrairement à celles-ci, les FFTr qui utilisent d'autres méthodes d'extension (en l'occurrence « mesh2x2 » et « simple ») sont affectées de pertes considérables, surtout au-delà de 15% d'occultation centrale, valeur pour laquelle les pertes dépassent au moins 5%. En effet 15% est la valeur de l'occultation centrale du VLT alors que le E-ELT se caractérise par une occultation bien plus importante de l'ordre de 30%. Pour ce niveau d'occultation



les résultats montrent des pertes plus aiguës de l'ordre de 25%, alors qu'avec l'extension spectrale cela reste aux environs de 5%. Il y a donc tout intérêt, dans ce cadre d'application à l'astronomie, de développer des méthodes qui soient performantes en présence d'occultation centrale.

### 3.7.5 Effet de la magnitude de l'étoile guide

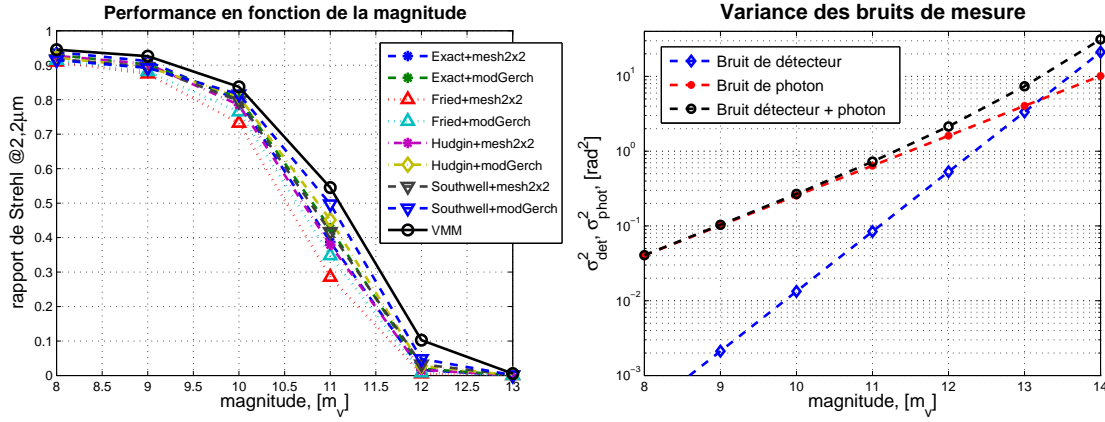


FIG. 3.14 – (Gauche :) Performance en rapport de Strehl à  $2,2\mu\text{m}$  en fonction de la magnitude de l'étoile guide. Pour des sources plus faibles, la configuration de Southwell combinée avec la méthode d'extension de Gerchberg assure la meilleure performance.

(Droite :) Variance du bruit de mesure en fonction de la magnitude de l'étoile guide.

Les systèmes d'OA extrême (se référer à la section 2.7) sont très sensibles à la magnitude de l'étoile guide. Puisque les sous-pupilles sont nombreuses et petites en taille, le nombre de photons utiles pour procéder à l'analyse de front d'onde peut être faible. Une dégradation du RSB est par conséquent constatée. La Fig. 3.14 résume ces résultats.

La performance obtenue avec le modèle de Southwell pour une magnitude  $m_v = 11$  peut paraître surprenante. Compte tenu des propriétés de propagation de bruit de cette configuration, ce résultat confirme les prédictions théoriques de la section 3.5.6. On constate d'ailleurs que la méthode d'extrapolation spectrale tend à se comporter mieux que toutes les autres pour des étoiles guides de magnitude  $m_v > 10$ , sauf pour le filtre de Fried (celui-ci propage plus de bruit et est particulièrement sensible au mode gaufre).

### 3.7.6 Propagation du bruit dans la reconstruction

Malgré l'existence de résultats théoriques sur la propagation de bruit pour les reconstituteurs de phase à partir de mesures de pentes [section 3.5.6], ces résultats ne considèrent pas l'effet de l'extension des pentes pour adaptation à l'utilisation des méthodes Fourier. La procédure d'extension peut avoir un impact non négligeable sur les coefficients de propagation. La difficulté d'aborder le problème théoriquement pour ce cas de figure mène à une étude numérique de Monte Carlo dans les mêmes conditions des simulations précédentes. Pour cela on reconstruit directement le bruit sur les mesures de pente pour un signal de phase nul,  $\phi = 0$ . Ceci permet de calculer directement le terme  $\eta_b$  indépendamment du terme de biais sur l'Eq. (3.56). Le niveau de bruit utilisé est de  $\sigma_w^2 = 1\text{rd}^2$ ,

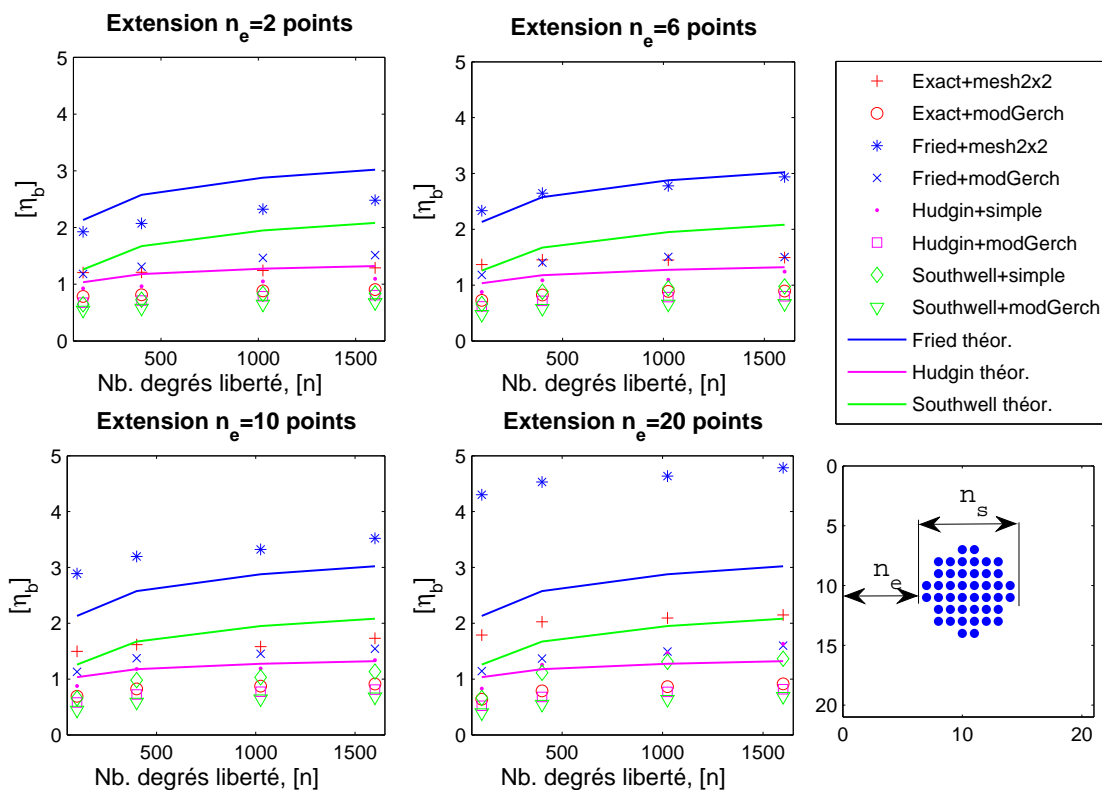


FIG. 3.15 – Propagation du bruit en fonction du nombre de points reconstruits dans la pupille ( $n$ ) et de la taille de la grille de reconstruction ( $N$ ).  $N^2 = (n_s + n_e)^2$ , où  $n_s$  est le nombre linéaire de sous-pupilles et  $n_e$  est le nombre de points utilisés pour l'extension. Autrement dit, une couronne de  $n_e$  sous-pupilles artificielles est rajoutée autour de la grille correspondant aux  $n_s$  sous-pupilles physiques. Les courbes théoriques sont celles de la Fig. 3.15. Calcul effectué sur 1000 tirages aléatoires de bruit.

correspondant à une étoile guide de magnitude  $m_v \approx 11,2$  (consultable sur les courbes de la Fig. 3.14-droite).

Les courbes sur la Fig. 3.15-gauche montrent les coefficients de propagation obtenus en fonction du nombre de points dans la pupille et en fonction de la grille de reconstruction. Cette étude vise à comparer les coefficients de propagation pour les différents filtres et méthodes d'extension aux résultats théoriques sur la Fig. 3.10.

A partir de cette figure on constate que le reconstituteur avec le moindre niveau de propagation correspond à la configuration de Southwell avec extension spectrale (algorithme modifié de Gerchberg). Ceci est en accord avec les résultats analytiques de la section 3.5.6 et de la Fig. 3.10. Cependant, les courbes indiquent une valeur toujours au dessous de celle théorique, un comportement trouvé aussi par [Zou et Rolland, 2006]. Une justification plausible est sûrement liée à la modification de la géométrie en rajoutant des décalages horizontaux et verticaux [§3.4.2.4] pour augmenter la corrélation de la mesure avec le modèle. Dans l'extrême opposé, la configuration de Fried avec extension « mesh2x2 » présente le niveau de propagation le moins performant. Encore une fois, les prédictions analytiques sont vérifiées.

De cette analyse ressort aussi la constatation suivante : les quatre courbes plus basses utilisent l'algorithme d'extrapolation spectrale, et ce pour n'importe quelle géométrie utilisée. Il y a donc un intérêt majeur à utiliser l'extrapolation spectrale que l'on propose ici en cas de niveaux de bruit plus importants (ou de façon équivalente pour l'observation avec analyse sur étoiles faibles).

L'utilisation de grilles de reconstruction beaucoup plus larges que celles strictement nécessaires (avec une couronne d'une sous-pupille artificielle pour réaliser la périodisation de la phase décrite à la section 3.5.3) implique une augmentation considérable des coefficients de propagation, spécialement pour le filtre de Fried.

Ces résultats permettent donc de réinterpréter la performance atteinte lors des simulations des sections précédentes. La configuration « Southwell+modGerch », pour faire court, ayant le moindre coefficient de propagation justifie alors le comportement observé sur la Fig. 3.14, où la performance est supérieure à toutes les autres configurations sauf pour la VMMr.

### 3.7.7 Etude de la FEP – localisation des erreurs

Les courbes sur la Fig. 3.16 permettent de se pencher sur les résultats des FFTr d'un autre point de vue. Si les résultats obtenus par la méthode d'extension spectrale en terme de rapport de Strehl sont déjà considérables, alors le calcul de la FEP confirme son intérêt et performance.

L'utilisation de l'algorithme d'extrapolation spectrale tend en effet à améliorer la structure de la FEP. Sans surprise la méthode « mesh2x2 » introduisant une composante gaufre élevée présente un pic au tour de  $1/(2d)$  que ni la régularisation ni l'extension spectrale arrivent à éliminer (une légère atténuation est obtenue cependant).

## 3.8 Adaptation à la boucle fermée

L'adaptation à la boucle fermée entraîne une modification structurelle de l'estimation. Dans ce cas, les aspects spatiaux et temporels sont mêlés. La proposition suggérée par [Correia et al., 2007] consiste à utiliser un intégrateur couplé à un reconstituteur dont les *a priori* auraient été ajustés. Pour cela il faudrait tenir compte de la réjection de la boucle d'asservissement. L'approximation alors proposée consiste à remplacer  $W_\phi \propto \nu^{-11/3}$  par  $W_{\tilde{\phi}} \propto \nu^{-5/3}$  en supposant une réjection  $\propto f^2$ .

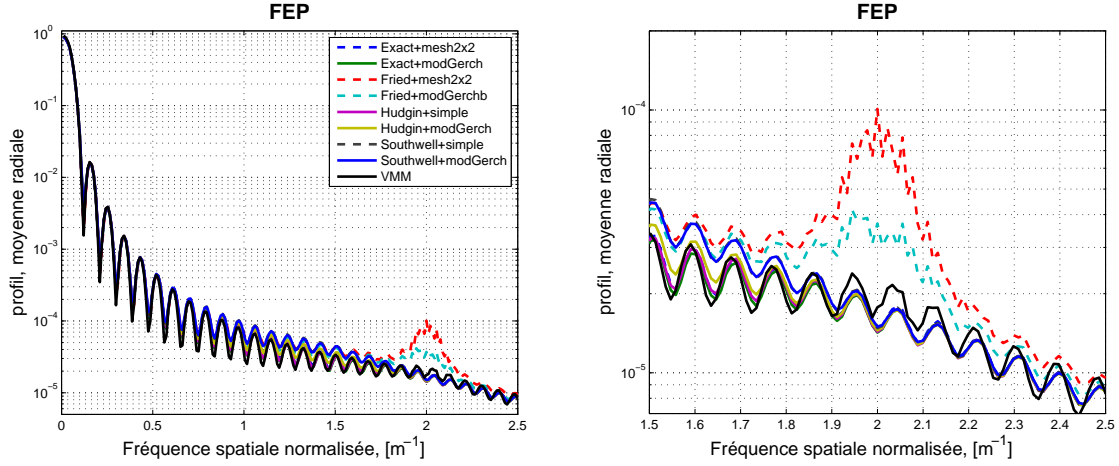


FIG. 3.16 – Moyenne radiale de la FEP sur 100 tirages de phase aléatoires. La fréquence spatiale figurant sur les axes des abscisses est normalisée par  $\sqrt{2}$  car il s'agit de la moyenne radiale.

Une caractérisation approfondie du comportement des algorithmes analysés dans ce chapitre à la boucle fermée, n'a pas semblé pertinent pour les raisons suivantes : le régulateur est *ad-hoc*, c'est-à-dire, sont choisis ne relèvent pas d'aucun raisonnement d'optimalité, le réglage devient difficile, car des termes de pondération doivent être choisis pour bien tenir compte des nouveaux *a priori*, les retards intrinsèques à l'OA (voir chronogramme sur la Fig. 2.14) ne sont pas correctement pris en compte, et enfin la performance en boucle fermée cumulée de nombreux effets (voir sections 3.7.2 et suivantes), ce qui rend l'interprétation des résultats très délicate.

Procéder à la reconstruction statique de front d'onde puis l'adapter au fonctionnement en boucle fermée reste pertinent, comme le montre [Le Louarn, 2002] qui utilise un reconstituteur MAP adapté à la boucle fermée. Cependant, cette thèse vise plutôt une solution de commande à variance minimale en boucle fermée. Ce sera l'objet du chapitre 4, qui introduit l'approche LQG. Ensuite dans le chapitre 5, la commande LQG est adaptée aux GNDL en utilisant une méthode itérative qui se sert des certains résultats et propriétés de la base de Fourier défrichées dans ce chapitre.

### 3.9 Exploitation en temps réel – analyse algorithmique

Un des intérêts majeurs des méthodes utilisant la transformée de Fourier discrète (notamment la FFT) consiste à garder une complexité de calcul raisonnable pour des systèmes d'OA en grand nombre de degrés de liberté (GNDL).

La métrique pertinente en ce qui concerne les calculateurs temps réel est plutôt liée aux pics de charge et non le nombre total d'opérations calculatoires. C'est sur ces pics que les calculateurs sont conçus pour exécuter une tâche précise. On va donc introduire une nouvelle métrique qui se focalise sur la densité et non le nombre total de calculs. De plus, cette nouvelle métrique tient compte de la façon dont les calculs sont enchaînés et exécutés dans le temps.

La Fig. 3.17 permet de visualiser, bien que schématiquement, l'enchaînement des opérations des méthodes VMMr et FFTr. Sans aucune optimisation particulière, les calculs de la FFTr ne commencent pas avant que toutes les données soient disponibles pour que les transformées en  $x$  et  $y$  puissent être calculées. Il s'ensuit les étapes de filtrage décrites à la section 3.5.

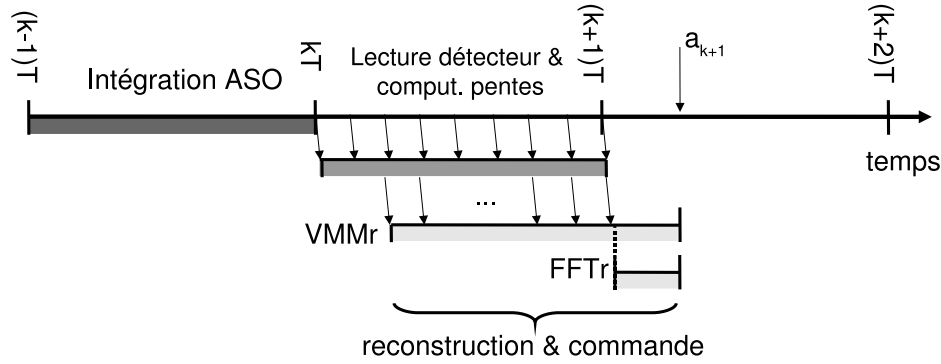


FIG. 3.17 – Enchaînement temporel des opérations pour les reconstitueurs classiques (VMMr) faisant appel aux multiplications vecteur-matrice et aux reconstitueurs basés sur les transformées de Fourier (FFTr). Le retard du calculateur temps réel est donné par le temps requis pour le calcul de la dernière portion.

On considère ici que la VMMr est répartie sur  $n_s/2$  sous-trames. Ceci dépend de la technologie adoptée ; il est supposé que deux lignes ou colonnes sont lues par sous-trame, comme dans le cas de l'instrument SPHERE. Les lois d'évolution de la complexité calculatoire en fonction du nombre de degrés de liberté sont représentées sur la Fig. (3.18). Le nombre total et la densité d'opérations sont montrées pour permettre une comparaison plus élargie.

[Correia *et al.*, 2007] montrent que le nombre total d'opérations  $N_{op}$  des FFTr s'écrit

$$N_{op} \approx 6(N_{iter} + 1)\beta N^2 \log_2(N) + 4N_{iter}N^2 + 11N^2, \quad (3.59)$$

compte tenue des transformées de Fourier directe et inverse et des opérations de filtrage du gaufre global et localisé [cf. §3.5.4].  $N_{iter}$  représente le nombre d'itérations réalisées par l'algorithme de Gerchberg modifié.  $N_{iter} = 0$  pour toutes les autres méthodes d'extension. Le paramètre  $\beta$  dépend de l'architecture du calculateur temps réel. Dans les simulation effectuées une valeur pour  $\beta \approx 5$  a été prise (à partir de mesures sur un ordinateur standard). La valeur de  $N$  est, on le rappelle, le nombre de points (linéaire) sur lesquels est défini la grille des transformées de Fourier. Les opérations d'extension<sup>7</sup> et de circularisation sont considérées négligeables devant tous les autres calculs.

[Ramos *et al.*, 2008] montrent que l'étape initiale consistant à réaliser les transformées de Fourier directes de pentes peut se mettre en place de façon séquentielle, au fur et à mesure que les pentes deviennent disponibles par opposition à attendre que toutes les pentes soient disponibles avant de procéder au calcul des FFT bidimensionnelles<sup>8</sup>. Ceci a comme conséquence immédiate la diminution du retard pur sur la Fig. 3.17 car il s'agit en effet de décharger une partie des calculs avant que la dernière mesure ne soit disponible.

Les courbes sur la Fig. 3.18 présentent le nombre d'opérations restant à effectuer après l'arrivée de la dernière mesure. Des courbes correspondant aux FFTr avec et sans l'optimisation proposée par [Ramos *et al.*, 2008] (en rouge) révèlent une énorme diminution de calculs vis-à-vis du nombre total d'opérations de la VMM (cercles noirs). Cependant, le nombre d'opérations à effectuer après la

<sup>7</sup>Bien évidemment s'il ne s'agit pas de la méthode de Gerchberg modifiée.

<sup>8</sup>Les FFT bidimensionnelles s'appliquent sur chaque ligne/colonne puis sur chaque colonne/ligne. Le calcul n'est complet qu'après que toutes mesures soient disponibles.

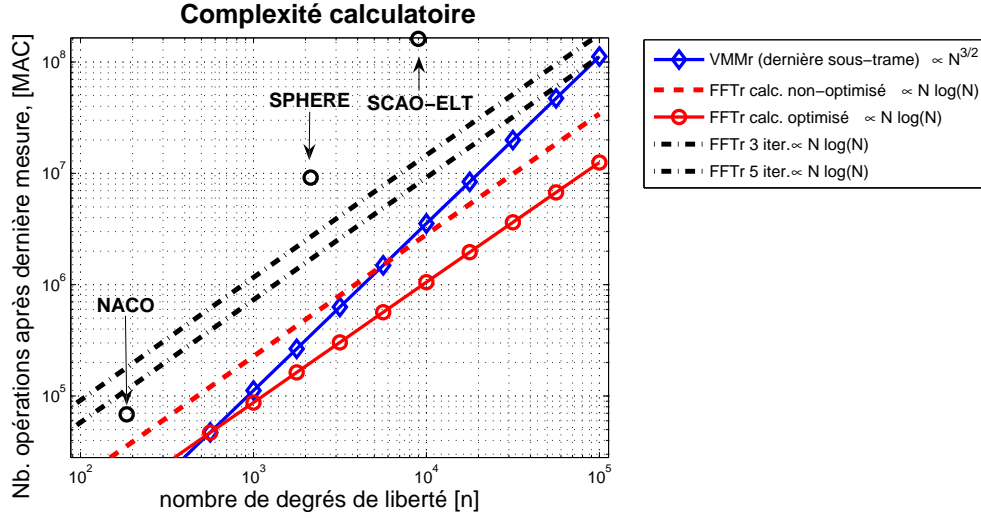


FIG. 3.18 – Comparaison des VMMr et FFTr en fonction du nombre de degrés de liberté. (lignes continues). Les lignes pointillées montrent le nombre d'opérations à exécuter durant la dernière sous-trame. Ceci définit le retard pur du calculateur temps réel (mis à part d'autres opérations auxiliaires). Le FFTr est défini sur une grille carrée de  $N = (n_s + 2)$  points et  $n = n_s$ .

dernière mesure est approximativement le même pour les systèmes ExAO actuels et ce n'est que pour les systèmes de taille ELT que l'avantage est visible.

La complexité calculatoire de la mise en œuvre de l'algorithme itératif d'extension spectrale des pentes (alias Gerchberg modifié ou « modGerch ») augmentent considérablement le nombre de calculs, comme on pourrait s'y attendre. Même avec l'optimisation du calcul initial des transformées directes des pentes les aller-retours espace de Fourier espace direct accroissent le nombre de calculs. La densité de calculs pour des systèmes de taille ELT est encore supérieure à celle des VMMr. Les avantages en terme de reconstruction en présence d'occultation centrale et en terme de propagation de bruit sont ainsi contrebalancés par un coût calculatoire fortement accru.

Toutefois, les bénéfices de l'utilisation d'une base de fréquences spatiales sont divers : le calcul et mise à jour du filtre se fait de façon beaucoup plus simple (pas besoin de calculer des énormes matrices et ses inverses) ; la place mémoire et les temps de transfert sont réduits.

### 3.10 Bilan et ouverture

L'utilisation d'algorithmes rapides de calcul des modes de Fourier permet de diminuer fortement le nombre d'opérations calculatoires, passant à un total de  $O(n \log(n))$  qui remplace le  $O(n^2)$  des méthodes classiques (VMMr).

Dans le but de formaliser le problème de reconstruction statique de front d'onde dans l'espace des fréquences spatiales, on a proposé une approche nouvelle de description du problème direct dans cette base sous hypothèses peu restrictives sur la phase.

L'inversion du problème direct a été réalisée au moyen de filtres garantissant une estimée par attache moindres carrés aux données ou à variance minimale d'erreur d'estimation. Afin d'adapter

la pupille annulaire du télescope à la grille sur laquelle sont définies les FFT, des contraintes physiques ont été identifiées et une solution revue pour trois géométries simplificatrices de l'ASO Hartmann-Shack. Cependant, l'imposition de toutes contraintes conjointement n'est structurellement pas possible sur toute la grille, notamment aux bords. Les contraintes n'étant pas non plus exactes en présence de bruit de mesure, cela a amené à développer une méthode itérative basée sur l'algorithme d'extrapolation spectrale de Gerchberg-Papoulis.

Un cadre unificateur est proposé qui regroupe les nouvelles propositions de modèles et filtres et les méthodes existantes. Celles-ci ont été analysées sous un formalisme commun.

Des simulations numériques de Monte Carlo permettent de comparer, en vue de l'application à un problème d'OA, les performances en rapport de Strehl des couples filtre/méthode d'extension, dont le filtre « exact » qu'on propose ici. Le simulateur mis en place prend soin de simuler les phases et les pentes avec un échantillonnage fin pour bien modéliser les processus physiques.

On s'est ensuite intéressé aux effets de la magnitude de l'étoile guide, du sous-éclairage, de la régularisation, de l'occultation centrale sur la performance optique des reconstituteurs dans l'espace de Fourier. Ceux-ci sont comparés à la méthode classique à variance minimale (alias MMSE ou MAP, car solutions identiques) consistant à utiliser une multiplication matricielle d'un vecteur de pentes par un reconstituteur linéaire. On a aussi brièvement regardé les coefficients de propagation de bruit et enfin à la structure de la FEP en longue pose.

Comme appréciation globale, on tient à souligner que la méthode de reconstruction FFTr permet d'obtenir en général des performances légèrement inférieures à la VMMr. Cependant, le nombre total d'opérations calculatoires est réduit d'environ deux ordres de grandeur pour les systèmes d'OA classique sur les ELT futurs.

La modélisation « exacte » du problème direct donne origine à un filtre dont les performances s'améliorent peu relativement à des modèles moins précis. Ceci est sûrement dû aux effets conjoints de l'extension (de la pupille annulaire à la pupille carrée) et propagation de bruit lors de la reconstruction.

En ce qui concerne les différentes configurations de filtres et méthodes d'extension, le nouvel algorithme d'extension spectral proposé ici tend à améliorer le rapport de Strehl, notamment pour des objets moins lumineux et surtout en présence d'occultation centrale. La méthode d'extension spectrale améliore aussi la structure de la FEP et les propriétés de propagation de bruit.

A noter qu'il est étonnant que la géométrie de Southwell et le filtre qui lui correspond sont souvent négligés dans la littérature. On montre en effet que le modèle de Southwell est très compétitif, avec une mise en œuvre des plus simples et des performances surprenantes si les écarts latéraux sont pris en compte dans le modèle direct. Compte tenu de ses caractéristiques de propagation de bruit, ce modèle présente la meilleure performance parmi les FFTr en faible flux.

L'adaptation à la boucle fermée proposée utilise un régulateur de type intégrateur. Cette proposition n'est pas optimale car elle ne tient pas compte du chronogramme d'opérations en OA et implique une adaptation *ad-hoc* du terme de régularisation.

Le chapitre 4 expose les bases de l'estimation et commande optimales en utilisant un formalisme d'état. L'approche Linéaire-Quadratique-Gaussienne (LQG) est utilisée, avec des modèles plus compactes en vue de la mise en œuvre temps réel des systèmes à grand nombre de degrés de liberté (GNDL) au chapitre 5.



## **Chapitre 4**

# **Commande à variance minimale : l'approche linéaire quadratique gaussienne**

Où la théorie classique de la commande et du filtrage optimal des systèmes dynamiques stochastiques linéaires est présentée. L'approche linéaire quadratique gaussienne (LQG) est détaillée et l'application à l'optique adaptative est introduite puis simplifiée en vue des systèmes à très grand nombre de degrés de liberté.



---

**Sommaire**

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>93</b>
<b>4.2</b>	<b>Rappels sur le formalisme d'état</b>	<b>93</b>
4.2.1	Notions préliminaires	94
4.2.2	Stabilité, commandabilité, observabilité	95
4.2.3	Liens avec les fonctions de transfert	97
<b>4.3</b>	<b>Commande stochastique optimale - introduction à l'approche LQG</b>	<b>97</b>
4.3.1	Fondements de la théorie	98
4.3.2	Estimation optimale linéaire par filtrage de Kalman	100
4.3.3	Fonctions de transfert du régulateur LQG	104
4.3.4	Synthèse de la solution LQG	105
<b>4.4</b>	<b>L'approche LQG en OA</b>	<b>105</b>
4.4.1	Travaux précédents : de l'intégrateur à la commande LQG	105
4.4.2	Définition du critère d'optimalité	108
4.4.3	Développement de la solution LQG	108
4.4.4	Modèle pour la commande	111
4.4.5	Évaluation de performance	113
4.4.6	Commande optimale statique pour les OA en boucle ouverte	116
<b>4.5</b>	<b>Modèles d'évolution temporelle de la phase</b>	<b>117</b>
4.5.1	Méthodes d'identification de paramètres	117
4.5.2	Modèles auto-régressifs du 1er ordre	117
4.5.3	Modèles auto-régressifs du second ordre	119
<b>4.6</b>	<b>Réinterprétation sous formalisme d'état d'autres approches de commande</b>	<b>120</b>
4.6.1	Intégrateur	123
4.6.2	<i>POLC</i>	124
4.6.3	FrIM-IMC	125
<b>4.7</b>	<b>Bilan</b>	<b>127</b>

---

## 4.1 Introduction

L'approche de commande proposée au chapitre 3 pour la boucle fermée est basée sur une régulation à action intégrale, communément dénommée « intégrateur » tout court. Le choix de ce régulateur n'a pas été motivé par un raisonnement d'optimalité.

Ce chapitre vise à poser le cadre de la commande optimale par minimisation de la variance de phase résiduelle, un critère physiquement justifié dans un contexte d'OA, puisque le rapport de Strehl est ainsi maximisé.

Avant de s'y attaquer, des concepts fondamentaux sur la modélisation par espace d'état sont brièvement rappelés, aussi bien que les définitions les plus importantes, notamment la stabilité, l'observabilité et la commandabilité des systèmes dynamiques.

Le problème d'optimisation est entièrement ramené à un traitement à temps discret, en s'appuyant sur l'équivalence au critère continu [Kulcsár *et al.*, 2006]. La synthèse de la commande optimale repose sur les connaissances *a priori* du système incluant les statistiques spatio-temporelles de la phase. Elle est traitée dans le cadre de la commande optimale stochastique à la section 4.3, en faisant appel au théorème de séparation [Joseph et Tou, 1961, Bar-Shalom et Tse, 1974]. Celui-ci permet de traiter le problème en deux temps : une étape de commande déterministe, sous hypothèse que toutes les grandeurs sont connues, et une étape d'estimation optimale des grandeurs requises pour l'étape précédente. Les notions d'estimation optimale par filtrage de Kalman [Kalman, 1960], [Anderson et Moore, 1995b] sont présentées à la section 4.3.2.1.

L'estimation optimale repose sur un modèle d'évolution temporelle de la perturbation, dont l'obtention mérite une attention particulière. A la section 4.5 le choix de paramètres pour la construction de modèles autorégressifs simples est précisé, après une discussion sur la pertinence de leur usage. Les fonctions de transfert de la commande LQG sont décrites à la section 4.3.3.

L'application au contexte de l'OA est enfin conduite à la section 4.4 où la démarche de la commande optimale LQG est détaillée, étape par étape, pour les systèmes d'OA classiques avec MD infiniment rapides. Dans ce scénario, seule la dynamique de la perturbation est prise en compte.

Les résultats d'estimation statique décrits au chapitre 3 sont déduits à partir d'une particularisation de l'approche LQG à la section 4.4.6 en supposant des occurrences de phase non corrélées et l'absence de retards de mesure.

D'autres approches de commande sous-optimale, dont l'intégrateur, le *POLC* pour « pseudo open-loop control » [Gilles, 2005] et le *FrIM-IMC* pour « Fractal Iterative Method + Internal Model Control » [Béchet *et al.*, 2007] sont réinterprétées sous forme d'observateurs dans le cadre d'une approche d'état à la section 4.6, montrant ainsi la souplesse et la généralité du formalisme d'état.

L'approche optimale sera ensuite adaptée dans un premier temps aux OA à grand nombre de degrés de liberté au chapitre 5 puis dans un deuxième temps aux systèmes constitués de MD à réponse non instantanée au chapitre 6.

## 4.2 Rappels sur le formalisme d'état

Les représentations d'état présentées dans cette section sont abordées dans la version discrète, souvent obtenues à partir de la discrétisation d'une représentation continue.

### 4.2.1 Notions préliminaires

En automatique, une représentation d'état permet de modéliser un système dynamique sous forme matricielle en utilisant des variables d'état, des entrées et des sorties, liées par des équations différentielles, dans le cas continu, et des équations aux différences dans le cas discret. Cette représentation, qu'elle soit linéaire ou non linéaire, permet de déterminer l'état du système à n'importe quel instant futur si les valeurs initiales et les entrées sont connues. L'état regroupe les grandeurs physiques et leurs dérivées temporelles nécessaires à la description complète de la dynamique du système analysé.

Une très large classe de systèmes physiques peut être décrite par un système d'équations différentielles ordinaires (EDO) à coefficients constants. En introduisant un nombre adéquat de variables auxiliaires, un tel système d'EDO peut se ramener à un système d'EDO du premier ordre. Sous forme compacte standard

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mathcal{A}x(t) + \mathcal{B}u(t) + v(t) \\ z(t) = \mathcal{C}x(t) + \mathcal{D}u(t) + \omega(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

où le temps  $t$  dans lequel évolue le système est supposé continu. Les composantes des deux équations de (4.1), respectivement *équation d'état* et *équation d'observation*, représentent

- $x \in \mathbb{R}^{n_t}$  - vecteur qui représente les  $n_t$  variables d'état ;
- $z \in \mathbb{R}^{n_m}$  - vecteur qui représente les  $n_m$  observations ;
- $u \in \mathbb{R}^{n_a}$  - vecteur qui représente les  $n_a$  décisions de commande ;
- $v \in \mathbb{R}^{n_t}$  - vecteur de bruit d'état ;
- $\omega \in \mathbb{R}^{n_m}$  - vecteur de bruit de mesure ;
- $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n_t \times n_t}$  - matrice de dynamique ou transition ;
- $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{n_t \times n_a}$  - matrice de commande ;
- $\mathcal{C} \in \mathbb{R}^{n_m \times n_t}$  - matrice d'observation ;
- $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^{n_m \times n_a}$  - matrice de gain instantané ;

Cette représentation d'état a aussi une variante discrète où les équations différentielles de l'Eq. (4.1) sont remplacées par des équations aux différences

$$\begin{cases} x_{k+1} = \mathcal{A}_d x_k + \mathcal{B}_d u_k + \Gamma_d v_k \\ z_k = \mathcal{C}_d x_k + \mathcal{D}_d u_k + w_k \end{cases} \quad (4.2)$$

où  $v_k$  et  $w_k$  sont des bruits blanc gaussiens discrets, c'est-à-dire des suites i.i.d. de vecteurs gaussiens.

Ces modèles peuvent être obtenus soit directement, soit par discrétisation d'une représentation d'état à temps continu. Ce dernier cas correspond au scénario assez fréquemment rencontré d'un système dynamique décrit par des EDO mais commandé par ordinateur. Le passage de la version continue à la version discrète est donné par la propriété 4.2.

**Remarques :** Le terme « observations » sera désormais utilisé dans l'ensemble de ce mémoire pour le vecteur  $z_k$ . Ces observations sont un modèle des mesures acquises par le système. Elles peuvent coïncider exactement ou être liées par une fonction linéaire déterministe. ◀

#### 4.2.1.1 Solution exacte

La solution et la discrétisation exactes des systèmes dynamiques régis par des équations linéaires sont rassemblées au sein des lemmes suivants.

**Propriété 4.1** *Solution exacte des systèmes dynamiques régis par des équations linéaires.*

Soit le modèle stochastique général, ayant pour entrée le bruit blanc, gaussien  $v(t)$  de DSP  $\Sigma_v$

$$\dot{x}(t) = \mathcal{A}x(t) + \mathcal{B}u(t) + v(t). \quad (4.3)$$

La solution exacte à l'instant  $t$  de ce système est donnée à partir de l'instant  $t_i$  par

$$x(t) = x(t_i)e^{\mathcal{A}(t-t_i)} + \int_{t_i}^t e^{\mathcal{A}(t-\tau)} (\mathcal{B}(\tau)u(\tau) + v(\tau)) d\tau \quad (4.4)$$

La matrice exponentielle et l'intégrale de la matrice exponentielle sont données aux lemmes 8.1 et 8.2 respectivement<sup>1</sup>.  $\triangle$

**Propriété 4.2** *Discrétisation exacte de systèmes linéaires continus.*

La discrétisation exacte du système de l'Eq. (4.3) pour une entrée  $u_k$  constante<sup>2</sup> sur l'intervalle  $t \in [kT_s, (k+1)T_s]$  est donnée par l'Eq. (4.4) avec  $t - t_i = T_s$ . Il en résulte

$$x_{k+1} = \mathcal{A}_d x_k + \mathcal{B}_d u_k + v_k, \quad (4.5)$$

où

$$\mathcal{A}_d \triangleq e^{T_s \mathcal{A}_c}, \mathcal{B}_d \triangleq \int_0^{T_s} e^{\mathcal{A}_c} \mathcal{B}_c dt. \quad (4.6)$$

Les exponentielles de matrices sont obtenues en appliquant le lemme 8.1 et les intégrales des exponentielles le lemme 8.2.

Le bruit  $v_k$  dans l'Eq. (4.5) est un bruit blanc, gaussien discret, c'est-à-dire une suite i.i.d. de vecteurs gaussiens de loi  $v_k \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_v)$  où la matrice de covariance est donnée par

$$\Sigma_v \triangleq \int_0^{kT_s} e^{t\mathcal{A}} \Sigma_v e^{t\mathcal{A}^T} dt. \quad (4.7)$$

$\triangle$

La représentation d'état est particulièrement adaptée aux systèmes multivariables (plusieurs entrées et plusieurs sorties). Elle est donc tout à fait pertinente dans le cadre de l'optique adaptative où les composantes des espaces vectoriels de mesures, commandes et phases turbulentes sont nombreuses. Dans ce contexte d'OA, les composantes de ces espaces vectoriels figureront explicitement dans le modèle d'état. En outre, une approche d'état permet de mettre en évidence des modèles sous-jacents que par exemple une approche fréquentielle ne pourrait pas dévoiler. Cette propriété s'avère très utile en OA classique et *a fortiori* en OAMC.

**4.2.2 Stabilité, commandabilité, observabilité**

Plusieurs définitions de stabilité d'un système décrit par un modèle d'état linéaire du type (4.1) et (4.2) existent.

La stabilité au sens de Lyapunov sera considérée, puisqu'elle est plus restrictive que la stabilité entrée-bornée/sortie-bornée. Les définitions sont énoncées pour la partie déterministe des modèles (c'est-à-dire, les bruits d'état et de mesure sont absents).

<sup>1</sup>L'écriture  $\dot{x}(t) = \mathcal{A}x(t) + \mathcal{B}u(t) + v(t)$  est en fait un abus de notation : un bruit blanc gaussien ne peut pas être considéré comme un signal au sens habituel, car seules ses intégrales temporelles ont un sens physique. En toute rigueur, il faudrait utiliser la notation du calcul stochastique d'Itô :  $dx(t) = (\mathcal{A}x(t) + \mathcal{B}u(t))dt + dv(t)$ .

<sup>2</sup>Appliquée par un bloqueur d'ordre zéro.

**Définition 4.1 Stabilité au sens de Lyapunov :** Pour un système linéaire à entrée nulle,  $u_k = 0$ , la stabilité au sens de Lyapunov est vérifiée si le vecteur d'état  $x$  tend vers 0 quand le temps tend vers l'infini,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = 0. \quad (4.8)$$

La stabilité au sens de Lyapunov revient à exiger que toutes les valeurs propres de la matrice  $\mathcal{A}$  soient à partie réelle négative pour le cas continu (4.1) et de module strictement inférieur à 1 pour le cas discret (4.2). La matrice  $\mathcal{A}$  est alors une matrice de stabilité.

Les propriétés de commandabilité et d'observabilité sont rappelées ci-dessous. Les résultats sont énoncés ici uniquement dans le cas discret, car on est dans un contexte de systèmes échantillonnés. Ces définitions sont utilisées dans le cadre d'un problème de synthèse de commande discrète.

**Définition 4.2 Commandabilité des systèmes linéaires :** quel que soit l'état initial  $x(0)$ , il existe une commande  $u_k$ , appliquée sur un intervalle de temps fini  $[0, k_f]$ , telle que  $x(k_f) = 0$ ,  $\forall k_f > \dim(x)$ .

**Théorème 4.1 Commandabilité des systèmes linéaires :**

Un système linéaire discret est commandable si et seulement si (ssi) le gramien de commandabilité défini par

$$\mathbf{W}_c \triangleq \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{A}_d^{i-1} \mathcal{B}_d \mathcal{B}_d^T (\mathcal{A}_d^T)^{i-1}, \quad (4.9)$$

est défini positif, c'est-à-dire de rang maximum  $\dim(x)$ . □

**Définition 4.3 Observabilité des systèmes linéaires :** quel que soit l'état initial  $x(0)$  et l'instant  $k_f > \dim(x)$ , l'état  $x(0)$  peut être reconstitué à partir de l'entrée  $u_k$  et des observations  $z_k$ ,  $k \in [0, k_f]$ .

**Théorème 4.2 Observabilité des systèmes linéaires :** Un système linéaire discret est observable ssi le gramien d'observabilité défini par

$$\mathbf{W}_o \triangleq \sum_{i=0}^{\infty} (\mathcal{A}_d^T)^{i-1} (\mathcal{C}_d^T) \mathcal{C}_d \mathcal{A}_d^{i-1} \quad (4.10)$$

est défini positif, c'est-à-dire de rang maximum  $\dim(x)$ . □

En pratique, les gramiens sont obtenus à partir de l'équation de Lyapunov discrète

$$\mathcal{A}_d \mathbf{W}_c \mathcal{A}_d^T - \mathbf{W}_c + \mathcal{B}_d \mathcal{B}_d^T = 0 \quad (4.11)$$

pour ce qui concerne la commandabilité et

$$\mathcal{A}_d \mathbf{W}_o \mathcal{A}_d^T - \mathbf{W}_o + \mathcal{C}_d \mathcal{C}_d^T = 0 \quad (4.12)$$

pour l'observabilité.

**Définition 4.4 Systèmes stabilisables :** Si un système est commandable ou stable, alors il est stabilisable. Si un système est non commandable ou instable, alors il sera stabilisable si ses modes non commandables sont stables.

**Définition 4.5 Systèmes détectables :** Si un système est observable ou stable, alors il est détectable. Si un système est inobservable ou instable, alors il sera détectable si ses modes inobservables sont stables.

### 4.2.3 Liens avec les fonctions de transfert

Une représentation d'état linéaire discrète peut être transformée en fonction de transfert. Le résultat est exploité par le lemme 4.1. Chacune de ces deux représentations dynamiques contient les mêmes informations sur le système.

**Lemme 4.1 Représentation d'état et fonctions de transfert :**

*Soit la représentation d'état suivante :*

$$\begin{cases} x_{k+1} &= \mathcal{A}_d x_k + \mathcal{B}_d u_k \\ z_k &= \mathcal{C}_d x_k + \mathcal{D}_d u_k \end{cases} . \quad (4.13)$$

Après un passage en transformée  $\mathcal{Z}$  ([Papoulis, 1968]), avec  $x(0) = 0$ , la fonction de transfert discrète du système entre l'entrée  $u$  et la sortie  $z$  s'écrit sous la forme

$$\mathbf{z}(z) = \mathbf{G}(z)\mathbf{u}(z), \quad (4.14)$$

où  $\mathbf{G}(z)$  est définie par

$$\mathbf{G}(z) \triangleq \mathcal{C}_d (z\mathbf{I} - \mathcal{A}_d)^{-1} \mathcal{B}_d + \mathcal{D}_d. \quad (4.15)$$

□

Clairement, la matrice  $\mathbf{G}(z)$  est de dimensions  $n_m \times n_a$ , c'est-à-dire, nombre de mesures  $\times$  nombre d'actionneurs. Donc, pour chaque entrée, il y a  $n_m$  fonctions de transfert, ce qui complexifie l'analyse fréquentielle. Comme expliqué au début du paragraphe, une représentation d'état est en conséquence préférable pour les systèmes multivariables.

Le polynôme caractéristique de  $\mathcal{A}$  est

$$\det(z\mathbf{I} - \mathcal{A}). \quad (4.16)$$

Les zéros de ce polynôme sont les pôles de la fonction de transfert et au même temps les valeurs propres de  $\mathcal{A}$ . Si le système est commandable et observable, alors le nombre de pôles est égal au nombre de valeurs propres.

## 4.3 Commande stochastique optimale - introduction à l'approche LQG

Les approches linéaire quadratique (LQ) et linéaire quadratique gaussienne (LQG) sont un outil standard de synthèse en théorie de la commande optimale. Les ouvrages de référence [Åström, 2006], [Söderström, 2002] et [Anderson et Moore, 1995a] ont été largement utilisés dans la présentation et le développement de la commande stochastique qui suivent dans ce chapitre.

Les aspects principaux de ces deux approches sont décrits dans cette section pour illustrer le déroulement de la démarche LQ(G) et dévoiler au fur et à mesure l'application à l'OA.

Le titre de cette section mentionne la commande stochastique. C'est justement parce que les modèles d'état présentés aux Eqs. (4.1-4.2) incluent des sources de bruit  $v_k$  et  $w_k$  et d'incertitudes sur les paramètres du modèle. Cependant, les incertitudes ne seront pas considérées. Dans le cadre de l'application spécifique visée, l'aspect stochastique est associé aux bruits de mesure et d'état (cf. section 2.5.1.1).

### 4.3.1 Fondements de la théorie

L'approche LQ(G) peut être employée dans la résolution de problèmes de commande optimale, si ces problèmes vérifient aux trois conditions suivantes :

- (i) les systèmes sont linéaires,
- (ii) le critère est quadratique et
- (iii) les bruits sont à distributions gaussiennes avec de matrices de covariance connues.

Le formalisme LQ/LQG vise poser le cadre de la détermination de la commande optimale  $u_k \forall k \geq 0$  qui minimise le critère discret quadratique de la forme

$$J^d(u) = \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \left( (z_k^{\text{crit}})^T Q z_k^{\text{crit}} + u_k^T R u_k + 2 (z_k^{\text{crit}})^T S u_k \right) \quad \text{Critère discret LQG} \quad (4.17)$$

$Q$ ,  $S$  et  $R$  sont des matrices dites de pondération qui vérifient  $Q = Q^T$ ,  $Q - S R^{-1} S^T \geq 0$  et  $R = R^T > 0$ . Ces matrices sont déterminées en développant le critère lié à la performance ou spécifiées afin de traduire les contraintes physiques des systèmes tels que des saturations ou des pénalisations.

On définit le coût incrémental associé par

$$J^d(u)_k \triangleq \left( (z_k^{\text{crit}})^T Q z_k^{\text{crit}} + u_k^T R u_k + 2 (z_k^{\text{crit}})^T S u_k \right). \quad (4.18)$$

Le vecteur  $z_k^{\text{crit}}$ , dénommé « sortie-critère », est une fonction linéaire de l'état du système  $x_k$ . Cette sortie est à ne pas confondre avec la sortie  $z_k$ , les observations réalisées.

Dans le cadre de l'OA, on considère la minimisation de la variance de phase résiduelle de Eqs. (4.60-4.62). Ce même critère fut utilisé au chapitre 3 dans une logique de reconstruction statique de front d'onde.

Soit le système dynamique discret d'ordre  $n$  défini pour  $k \geq 0$  par

$$\begin{cases} x_{k+1} &= \mathcal{A}_d x_k + \mathcal{B}_d u_k + \Gamma_d v_k \\ z_k &= \mathcal{C}_d x_k + \mathcal{D}_d u_k + w_k \\ z_k^{\text{crit}} &= \mathcal{C}_d^{\text{crit}} x_k \end{cases} \quad \text{Système stochastique standard} \quad (4.19)$$

Par rapport au système de l'Eq. (4.2), le rajout d'une troisième ligne permet plus aisément de faire référence à la sortie-critère explicitement requise lors de la définition du critère discret de l'Eq. (4.17).

L'état  $x_k$  regroupe toutes les grandeurs physiques nécessaires à la description de la dynamique des systèmes d'OA, soit les état liés à la perturbation soit au MD. Le système général de l'Eq. (4.19) définit

- une équation d'évolution temporelle de l'état avec une matrice de transition  $\mathcal{A}_d$ , le vecteur associé à la commande  $\mathcal{B}_d$  et le bruit d'état  $v_k$ , blanc, de moyenne nulle et de matrice de covariance  $\Sigma_v$ . Ce dernier élément sera exploité par la suite pour rendre compte du caractère stochastique de l'évolution de la phase turbulente.
- une équation de mesure qui relève du fonctionnement de l'ASO avec les éventuels retards. Un bruit blanc à moyenne nulle de distribution gaussienne  $w_k \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_w)$  et indépendant du bruit d'état  $v_k$  se rajoute aux observations [section 2.5.1.1].
- Une équation associée au critère de l'Eq. (4.17), où la sortie requise pour l'évaluation de  $J^d(u)$  est calculée à partir de l'état  $x_k$  au travers la matrice  $\mathcal{C}_d^{\text{crit}}$ .

#### 4.3.1.1 Séparation de l'estimation et de la commande

Soit l'état  $x_k$  supposé parfaitement connu. Ceci est équivalent à considérer que l'état et les observations coïncident,  $z_k = x_k$ , il n'y a donc pas de bruit de mesure. De ce fait, cette configuration est dénommée information complète (InfC).

**Lemme 4.2** *Commande optimale en information complète.*

La solution optimale en InfC s'exprime par un retour d'état sous la forme

$$u_k \triangleq -\mathcal{K}_\infty x_k, \quad \text{Régulateur optimal en InfC} \quad (4.20)$$

avec

$$\mathcal{K}_\infty = \left( R + \mathcal{B}_d^\top P_\infty \mathcal{B}_d \right)^{-1} \left( \mathcal{B}_d^\top P_\infty \mathcal{A}_d + S \right), \quad (4.21)$$

où  $P_\infty$  est déterminé à partir de la solution unique de l'équation algébrique de Riccati de commande

$$P_\infty = Q + \mathcal{A}_d^\top P_\infty \mathcal{A}_d - \left( \mathcal{A}_d^\top P_\infty \mathcal{A}_d + S \right) \left( R + \mathcal{B}_d^\top P_\infty \mathcal{B}_d \right)^{-1} \left( \mathcal{B}_d^\top P_\infty \mathcal{A}_d + S \right), \quad (4.22)$$

avec  $Q$ ,  $R$  et  $S$  matrices liées au critère d'optimalité défini à l'Eq. (4.17).  $\square$

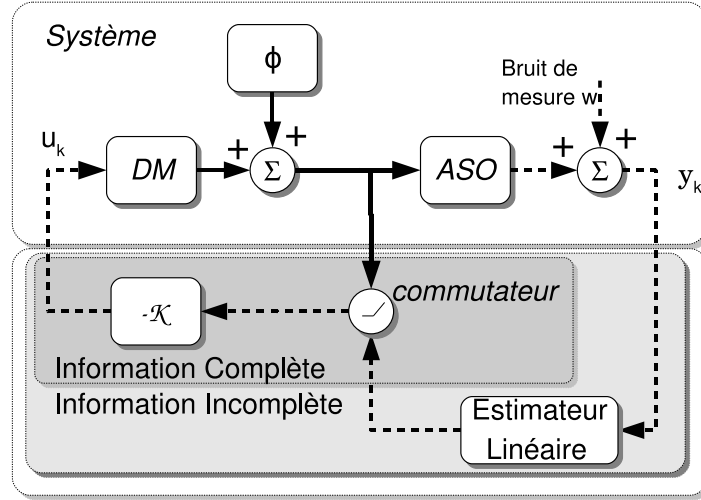


FIG. 4.1 – Séparation de l'estimation et de la commande. Le commutateur distingue deux cas : information complète où  $x_k$  est parfaitement connu et information incomplète où  $x_k$  est estimé à partir de mesures bruitées.

Dans le cas général en information incomplète (InfI), l'état n'est pas parfaitement connu, mais estimé à partir de mesures bruitées et, dans la plupart des systèmes, retardées dans le temps – voir en particulier l'organisation des opérations prenant place dans les systèmes d'OA détaillée sur la Fig. 2.14.

Pour résoudre le problème de commande optimale, on fait appel au théorème de séparation :

**Théorème 4.3** *Théorème de séparation [Joseph et Tou, 1961, Witsenhausen, 1971] et [Bar-Shalom et Tse, 1974] :*



« En information incomplète la commande optimale garde la même structure que la commande en information complète, sous les conditions i) – iii), si l'état est remplacé par son espérance conditionnelle, notée  $\hat{x}$ . » ▲

En appliquant le théorème de séparation, la commande optimale s'obtient à partir de l'Eq. (4.20) sous la forme

$$u_k = -\mathcal{K}_\infty \hat{x}_{k|k-1}, \quad \text{Régulateur optimal en Inf} \quad (4.23)$$

où l'estimée  $\hat{x}_{k|k-1}$  prend la place du vrai état  $x_k$ . L'indice inférieur  $(k|k-1)$  indique que l'espérance de  $x_k$  est calculée conditionnellement aux observations passées  $\{z_0, \dots, z_{k-1}\}$ . Ce calcul est l'objet de la section 4.3.2.

L'existence d'un modèle linéaire décrivant la dynamique de l'état rend possible la détermination de  $\hat{x}_{k|k-1}$  par filtrage de Kalman [Kalman, 1960, Anderson et Moore, 1995a].

L'état est donc obtenu récursivement à partir de l'expression

$$\hat{x}_{k|k-1} = \mathcal{A}_d \hat{x}_{k-1|k-2} + \mathcal{B}_d u_{k-1} + \mathcal{L}_k (z_{k-1} - \hat{z}_{k-1|k-2}), \quad (4.24)$$

où  $\mathcal{L}_k$  est le gain d'observateur optimal, obtenu à partir d'une équation de Riccati d'estimation, explicitée plus loin à la section 4.3.2, justement sur le filtrage de Kalman.

Un schéma général illustrant le fonctionnement de la boucle d'OA en information complète et information incomplète est proposé sur la Fig. 4.1.

#### 4.3.1.2 Synthèse des étapes de l'approche LQG

L'optimisation du critère  $J^d(u)$  de l'Eq. (4.17) requiert 5 étapes. Celles-ci constituent la démarche de l'approche LQG, et sont réalisées séquentiellement, comme l'indique la Fig. 4.2. Elle sont particularisées pour l'application à l'OA.

1. Développer le critère quadratique de performance (continu) et le discrétiser afin de le mettre sous forme d'un critère discret équivalent [Eq. (4.17)] pour identifier les matrices de pondération  $Q$ ,  $S$  et  $R$  ;
2. Identifier la sortie-critère  $z^{\text{crit}}$  qui regroupe les statistiques nécessaires à l'évaluation du critère ;
3. En déduire la forme du régulateur ;
4. Construire le modèle d'état de l'Eq. (4.19) permettant de décrire la dynamique des différents états considérés. Avec les matrices de pondération, les sorties  $(z_k^{\text{crit}}, z_k)$ , et les matrices du modèle (4.19), déterminer les gains de commande et d'observateur, obtenus à partir de la solution d'une équation de Riccati de commande et d'estimation respectivement.
5. Optionnellement, évaluer le critère à partir des matrices de variance-covariance de l'état.

Cette démarche est appliquée à l'OA à la section 4.4. Avant de poursuivre, des notions d'estimation optimale sont requises.

#### 4.3.2 Estimation optimale linéaire par filtrage de Kalman

Deux résultats majeurs, nécessaires à la dérivation de l'estimation optimale linéaire par filtrage de Kalman, sont rappelés ci-dessous. Les traits principaux sont décrits, mais une justification complète ne sera pas donnée. Seuls les résultats des Eqs. (4.32-4.35) seront utilisés. Le(a) lecteur(trice) est renvoyé(e) aux ouvrages [Åström, 2006], [Söderström, 2002] et [Anderson et Moore, 1995b].

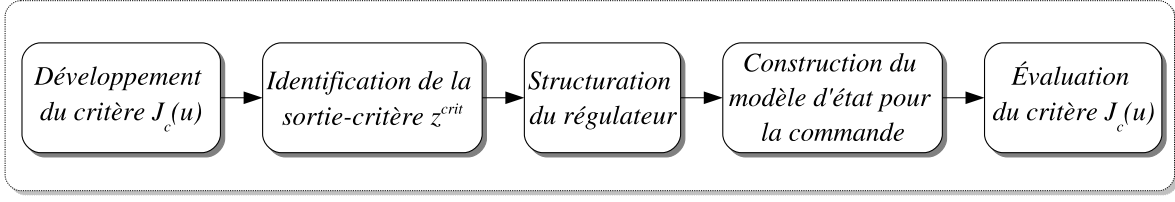


FIG. 4.2 – Etapes de la mise en œuvre de l'approche LQG, de la définition du critère d'optimisation à l'évaluation de performance.

**Lemme 4.3** *Espérance Conditionnelle : estimée optimale de  $x$  sachant  $z$ .*

*La meilleure estimée de  $x$  partant d'un autre vecteur d'observations  $z$  corrélé avec  $x$  minimisant*

$$J(\hat{x}) = E \left[ (x - \hat{x})(x - \hat{x})^T | z \right], \quad (4.25)$$

est

$$\hat{x} \triangleq E[x|z], \quad \text{Espérance de } x \text{ conditionnellement à } z \quad (4.26)$$

où  $E[\cdot]$  est l'espérance mathématique. Autrement dit, la meilleure estimée, au sens du minimum de variance d'erreur d'estimation, du vecteur  $x$  sachant  $z$  est l'espérance conditionnelle de  $x$ , notée  $E[x|z]$ .

Dans le cas gaussien, l'estimée  $\hat{x}$  est donnée par

$$\hat{x} = E[x] + \Sigma_{xz} \Sigma_z^{-1} (z - E[z]). \quad \text{Estimée VM de } x, \text{ cas gaussien} \quad (4.27)$$

où  $\Sigma_{xz} = E[xz^T]$  est la matrice de covariance conjointe de  $x$  et  $z$  et  $\Sigma_x = E[xx^T]$  la matrice de covariance de  $x$ . L'Eq. (4.27) n'est rien d'autre que la formule classique de projection orthogonale dans un espace de Hilbert standard.  $\square$

Cet estimateur est optimal relativement à deux critères importants : le critère de *variance minimale* et aussi le critère du *maximum a posteriori*. Une discussion plus élargie à ce sujet se trouve à la section 3.2.

**Propriété 4.3** *L'erreur d'estimation  $x - \hat{x}$  est orthogonale à  $z$  puisque*

$$E \left[ (x - \hat{x}) z^T \right] = 0. \quad (4.28)$$

$\triangle$

Cette propriété peut être interprétée comme le fait que toute l'information a été extraite des données.

**Lemme 4.4** *Estimation optimale pour des systèmes d'état linéaires :*

*Soit le système linéaire*

$$\begin{cases} x_{k+1} &= \mathcal{A}_d x_k + \mathcal{B}_d u_k + \Gamma_d v_k \\ z_k &= \mathcal{C}_d x_k + \mathcal{D}_d u_k + w_k \end{cases}, \quad (4.29)$$

où  $v_k$  et  $w_k$  sont des séquences gaussiennes indépendantes et de moyenne nulle et  $z_k$  une fonction de  $\{z_0, \dots, z_k\}$ .

La meilleure prédiction à un pas, c'est-à-dire  $\hat{x}_{k+1|k}$  est, d'après le lemme 4.3

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1|k} &= \mathbb{E}[x_{k+1}|\mathcal{Z}_k] \\ &= \mathbb{E}[x_{k+1}|\tilde{\mathcal{Z}}_k] \\ &= \mathbb{E}[x_{k+1}|\tilde{z}_k] + \mathbb{E}[x_{k+1}|\tilde{\mathcal{Z}}_{k-1}] - \mathbb{E}[x_{k+1}],\end{aligned}\quad (4.30)$$

où  $\tilde{\mathcal{Z}}_k = \{\tilde{z}_0, \dots, \tilde{z}_k\}$  est une séquence de variables aléatoires indépendantes et

$$\boxed{\tilde{z}_{k|k-1} = z_k - \hat{z}_{k|k-1}, \quad \text{Séquence des innovations}} \quad (4.31)$$

où  $\hat{z}_{k|k-1}$  est l'innovation à l'instant  $k$ . Ainsi, utilisant les résultats de l'Eq. (4.27) et la récursion de  $x$  donnée par l'Eq. (4.5) pour évaluer les termes de l'Eq. (4.30), l'estimée de  $\hat{x}_{k+1|k}$  s'obtient de

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1|k} &= \hat{x}_{k+1|\tilde{\mathcal{Z}}_k} \\ &= \mathcal{A}_d \hat{x}_{k|k-1} + \mathcal{B}_d u_k + \mathcal{L}_k (z_k - \hat{z}_{k|k-1}),\end{aligned}\quad (4.32)$$

où la matrice  $\mathcal{L}_k = \Sigma_{(\hat{x}_{k+1|k}, \tilde{\mathcal{Z}}_k)} \Sigma_{\tilde{\mathcal{Z}}_k}^{-1}$  est donnée par

$$\Sigma_{(\hat{x}_{k+1|k}, \tilde{\mathcal{Z}}_k)} \Sigma_{\tilde{\mathcal{Z}}_k}^{-1} = \mathcal{A}_d \Sigma_{k|k-1} \mathcal{C}_d^\top \left( \mathcal{C}_d \Sigma_{k|k-1} \mathcal{C}_d^\top + \Sigma_w \right)^{-1}, \quad (4.33)$$

avec  $\Sigma_{k|k-1} \triangleq \Sigma_{\tilde{x}_{k|k-1}} = \mathbb{E}[\tilde{x}_{k|k-1} \tilde{x}_{k|k-1}^\top]$  la matrice de covariance d'erreur d'estimation.

La matrice de covariance d'erreur d'estimation satisfait la récurrence

$$\Sigma_{k+1|k} = \mathcal{A}_d \Sigma_{k|k-1} \mathcal{A}_d^\top + \Gamma_d \Sigma_v \Gamma_d^\top - \mathcal{A}_d \Sigma_{k|k-1} \mathcal{C}_d^\top \left( \mathcal{C}_d \Sigma_{k|k-1} \mathcal{C}_d^\top + \Sigma_w \right)^{-1} \mathcal{C}_d \Sigma_{k|k-1} \mathcal{A}_d^\top, \quad (4.34)$$

qui représente une équation de Riccati d'estimation.

La meilleure estimée s'écrit alors

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k|k} &= \hat{x}_{k+1|k} \\ &= \hat{x}_{k|k-1} + \mathcal{H}_k (z_k - \hat{z}_{k|k-1}),\end{aligned}\quad (4.35)$$

où  $\mathcal{L}_k = \mathcal{A}_d \mathcal{H}_k$ . □

#### 4.3.2.1 Le filtre de Kalman à gain asymptotique

Le filtre de Kalman s'obtient directement des résultats des lemmes 4.3 et 4.4. La solution stationnaire, asymptotique est présentée ; aucune perte d'optimalité n'est introduite si le critère de commande est évalué à horizon infini, ce qui est le cas ici. On peut donc utiliser la solution asymptotique de l'Eq. (4.34), notée  $\Sigma_\infty$ , ainsi que les gains  $\mathcal{H}_\infty$  et  $\mathcal{L}_\infty$  au lieu de  $\Sigma_{k+1|k}$ ,  $\mathcal{H}_k$  et  $\mathcal{L}_k$  respectivement.

#### Étapes du filtre de Kalman :

##### 1. Calcul de l'innovation :

$$\boxed{\tilde{z}_{k|k-1} = z_k - \hat{z}_{k|k-1} = \mathcal{C}_d x_k + w_k - \mathcal{C}_d \hat{x}_{k|k-1} = \mathcal{C}_d \tilde{x}_k + w_k. \quad \text{Innovation}} \quad (4.36)$$

## 2. Mise à jour :

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + \mathcal{H}_\infty \tilde{z}_{k|k-1}.$$

En remplaçant  $\mathcal{H}_\infty$ , il vient

$$\boxed{\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + \Sigma_\infty \mathcal{C}_d^\top \left( \mathcal{C}_d \Sigma_\infty \mathcal{C}_d^\top + \Sigma_w \right)^{-1} \tilde{z}_{k|k-1}. \quad \text{Mise à jour}} \quad (4.37)$$

## 3. Prédiction :

$$\boxed{\hat{x}_{k+1|k} = \mathcal{A}_d \hat{x}_{k|k} + \mathcal{B}_d u_k. \quad \text{Prédiction}} \quad (4.38)$$

D'après les Eq. (4.37) et Eq. (4.38), en combinant les deux, il en découle

$$\hat{x}_{k+1|k} = \mathcal{A}_d \hat{x}_{k|k-1} + \mathcal{B}_d u_k + \mathcal{A}_d \mathcal{H}_\infty (z_k - \hat{z}_{k|k-1}), \quad (4.39)$$

où la deuxième ligne a été obtenue en remplaçant  $\hat{x}_{k|k}$  par son expression donnée à l'Eq. (4.37). On obtient ainsi la version asymptotique de l'Eq. (4.24), consistant à évaluer l'Eq. (4.39) en  $k|k-1$

$$\hat{x}_{k|k-1} = \mathcal{A}_d \hat{x}_{k-1|k-2} + \mathcal{B}_d u_{k-1} + \mathcal{L}_\infty (z_{k-1} - \hat{z}_{k-1|k-2}). \quad (4.40)$$

Le gain de l'observateur s'écrit, comme dans l'Eq. (4.33)

$$\boxed{\mathcal{L}_\infty = \mathcal{A}_d \mathcal{H}_\infty = \mathcal{A}_d \Sigma_\infty \mathcal{C}_d^\top \left( \mathcal{C}_d \Sigma_\infty \mathcal{C}_d^\top + \Sigma_w \right)^{-1}, \quad \text{Gain de Kalman}} \quad (4.41)$$

avec  $\Sigma_\infty$  la solution de l'équation algébrique de Riccati

$$\boxed{\Sigma_\infty = \mathcal{A}_d \Sigma_\infty \mathcal{A}_d^\top + \Gamma_d \Sigma_v \Gamma_d^\top - \mathcal{A}_d \Sigma_\infty \mathcal{C}_d^\top \left( \mathcal{C}_d \Sigma_\infty \mathcal{C}_d^\top + \Sigma_w \right)^{-1} \mathcal{C}_d \Sigma_\infty \mathcal{A}_d^\top. \quad \text{Riccati d'estimation}} \quad (4.42)$$

Une propriété importante du filtre de Kalman est que le gain de l'observateur ne dépend que des variances  $\Sigma_v$  et  $\Sigma_w$  et non des réalisations de ces bruits. Ceci a pour conséquence que la résolution de l'équation de Riccati et le calcul du gain peuvent être réalisés à l'avance ; seules les opérations de calcul de l'innovation, mise à jour et prédiction sont effectuées au fur et à mesure de l'arrivée des observations  $z_k$ .

**4.3.2.1.1 Conditions initiales :** Cet algorithme doit être initialisé par la donnée d'une estimation initiale  $\hat{x}_0 = \hat{x}_{0|-1}$  et de la variance d'erreur  $\Sigma_0 = \Sigma_{0|-1}$ . On utilise pour ce faire les espérances et les variances *a priori* des variables. L'initialisation est prise comme étant  $\hat{x}_{0|-1} = 0$ ,  $\hat{z}_{0|-1} = 0$  et  $u_0 = 0$ . La matrice de covariance d'erreur d'estimation est initialisée par les variances *a priori* des différentes variables.

**4.3.2.1.2 Convergence de la Riccati d'estimation :** Pour garantir la convergence de l'équation de Riccati, le couple  $(\mathcal{A}_d, \mathcal{C}_d)$  doit être détectable et le couple  $(\mathcal{A}_d, \Sigma_v^{1/2})$  (voir les définitions à la section 4.5) stabilisable, condition vérifiée en particulier si  $\mathcal{A}_d$  est stable.

### 4.3.3 Fonctions de transfert du régulateur LQG

Comme il avait été annoncé, l'approche d'état peut être traduite en fonctions de transfert. Le résultat principal est donné par le lemme 4.1. Il s'applique bien sûr aussi au cas d'un régulateur optimal LQG avec filtrage de Kalman. Ainsi, l'objectif de cette sous-section est de détailler le calcul des fonctions de transfert obtenues à partir de la structure du régulateur optimal figurant sur la Fig. 4.3.

**Propriété 4.4** *Fonctions de transfert du régulateur LQG.*

*Soit le transfert général*

$$\mathbf{y}(z) = \mathbf{C}(z)\mathbf{u}(z). \quad (4.43)$$

*Pour une commande sous forme prédictif  $u_k = -\mathcal{K}_\infty \hat{x}_{k|k-1}$  la fonction de transfert  $\mathbf{C}_p(z)$  s'écrit*

$$\mathbf{C}_p(z) = -(\mathbf{I} + \mathcal{K}_\infty \Lambda_p z^{-1} \mathcal{B}_d)^{-1} \mathcal{K}_\infty \Lambda_p z^{-1} \mathcal{A}_d \mathcal{H}_\infty, \quad (4.44)$$

*où*

$$\Lambda_p = (\mathbf{I} - \mathcal{A}_d (\mathbf{I} - z^{-1} \mathcal{H}_\infty \mathcal{C}_d))^{-1}. \quad (4.45)$$

*Pour une commande sous forme estimateur  $u_k = -\mathcal{K}_\infty \hat{x}_{k|k}$ , la fonction de transfert est*

$$\mathbf{C}_e(z) = (\mathbf{I} + \mathcal{K}_\infty \Lambda_e z^{-1} (\mathbf{I} - \mathcal{H}_\infty \mathcal{C}_d) \mathcal{B}_d)^{-1} \mathcal{K}_\infty \Lambda_e \mathcal{H}_\infty, \quad (4.46)$$

*où*

$$\Lambda_e = (\mathbf{I} - z^{-1} \mathcal{A}_d + z^{-1} \mathcal{H}_\infty \mathcal{C}_d \mathcal{A}_d)^{-1}. \quad (4.47)$$

△

**Démonstration : Fonctions de transfert de la commande LQG**

Les équations d'estimation et de mise à jour du filtre de Kalman sont, d'après les Eqs. (4.37–4.39)

$$\begin{cases} \hat{x}_{k|k} &= \hat{x}_{k|k-1} + \mathcal{H}_\infty (z_k - \mathcal{C}_d \hat{x}_{k|k-1}) \\ \hat{x}_{k+1|k} &= \mathcal{A}_d \hat{x}_{k|k} + \mathcal{B}_d u_k \end{cases}, \quad (4.48)$$

La seconde ligne de l'Eq. (4.48) peut aussi s'écrire, en notant respectivement  $\hat{\mathbf{x}}_p$  et  $\hat{\mathbf{x}}_e$  les transferts de  $\hat{x}_{k|k}$  et  $\hat{x}_{k|k-1}$ ,

$$z \hat{\mathbf{x}}_p = \mathcal{A}_d \hat{\mathbf{x}}_e + \mathcal{B}_d \mathbf{u}. \quad (4.49)$$

Donc, en multipliant par  $z^{-1}$  des deux côtés,

$$\hat{\mathbf{x}}_p = z^{-1} \mathcal{A}_d \hat{\mathbf{x}}_e + z^{-1} \mathcal{B}_d \mathbf{u}. \quad (4.50)$$

Avec ceci et la première ligne de l'Eq. (4.48)

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_p &= z^{-1} \mathcal{A}_d (\hat{\mathbf{x}}_p + \mathcal{H}_\infty (\mathbf{z} - \mathcal{C}_d \hat{\mathbf{x}}_p)) + z^{-1} \mathcal{B}_d \mathbf{u} \\ &= (\mathbf{I} - z^{-1} \mathcal{A}_d (\mathbf{I} - \mathcal{H}_\infty \mathcal{C}_d))^{-1} (z^{-1} \mathcal{B}_d \mathbf{u} + z^{-1} \mathcal{A}_d \mathcal{H}_\infty \mathbf{z}). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Pour une commande du type  $u_k = -\mathcal{K}_\infty \hat{x}_{k|k-1}$

$$\mathbf{u} = -\mathcal{K}_\infty (\mathbf{I} - \mathcal{A}_d (\mathbf{I} - \mathcal{H}_\infty \mathcal{C}_d))^{-1} (z^{-1} \mathcal{B}_d \mathbf{u} + \mathcal{A}_d \mathcal{H}_\infty \mathbf{z}). \quad (4.52)$$

En regroupant les termes, on obtient

$$\mathbf{u} = -(\mathbf{I} + \mathcal{K}_\infty \Lambda_p z^{-1} \mathcal{B}_d)^{-1} \mathcal{K}_\infty \Lambda_p \mathcal{A}_d \mathcal{H}_\infty \mathbf{z}, \quad (4.53)$$

où

$$\Lambda_p = (I - z^{-1} \mathcal{A}_d (I - \mathcal{H}_\infty \mathcal{C}_d))^{-1}. \quad (4.54)$$

La fonction de transfert du régulateur s'écrit finalement

$$\mathbf{C}_p(z) = - (I + \mathcal{K}_\infty \Lambda_p z^{-1} \mathcal{B}_d)^{-1} \mathcal{K}_\infty \Lambda_p \mathcal{A}_d \mathcal{H}_\infty. \quad (4.55)$$

Pour une commande sous forme estimateur du type  $u_k = -\mathcal{K}_\infty \hat{x}_{k|k}$ , en suivant un raisonnement tout à fait analogue au cas précédent, il en découle

$$\hat{\mathbf{x}}_e = (I - z^{-1} \mathcal{A}_d + z^{-1} \mathcal{H}_\infty \mathcal{C}_d \mathcal{A}_d)^{-1} [z^{-1} (I - \mathcal{H}_\infty \mathcal{C}_d) \mathcal{B}_d \mathbf{u} + \mathcal{H}_\infty \mathbf{z}], \quad (4.56)$$

et, cette fois-ci pour une commande du type  $u_k = -\mathcal{K}_\infty \hat{x}_{k|k}$ ,

$$\mathbf{u} = -\mathcal{K}_\infty (I - z^{-1} \mathcal{A}_d + z^{-1} \mathcal{H}_\infty \mathcal{C}_d \mathcal{A}_d)^{-1} [z^{-1} (I - \mathcal{H}_\infty \mathcal{C}_d) \mathcal{B}_d \mathbf{u} + \mathcal{H}_\infty \mathbf{z}]. \quad (4.57)$$

En regroupant les termes

$$\mathbf{C}_e(z) = - (I + \mathcal{K}_\infty \Lambda_e z^{-1} (I - \mathcal{H}_\infty \mathcal{C}_d) \mathcal{B}_d)^{-1} \mathcal{K}_\infty \Lambda_{est} \mathcal{H}_\infty, \quad (4.58)$$

où

$$\Lambda_e = (I - z^{-1} \mathcal{A}_d + z^{-1} \mathcal{H}_\infty \mathcal{C}_d \mathcal{A}_d)^{-1}, \quad (4.59)$$

ce qui conclut la démonstration. ■

#### 4.3.4 Synthèse de la solution LQG

Pour synthétiser les sections précédentes, la solution complète LQG est déterminée en deux étapes : premièrement résoudre un problème de commande déterministe dont la solution établit le régulateur optimal pour le cas InfC et deuxièmement résoudre un problème d'estimation optimale afin de trouver  $\hat{x}_{k|k-1}$  pour le cas Infl. La Fig. 4.3 montre la structure du régulateur optimal LQ(G) pour les cas InfC et Infl. Curieusement, l'application de la commande LQG est effectuée dans l'ordre inverse : d'abord estimer l'état puis appliquer la commande.

Le bloc supérieur schématise les équations d'état de l'Eq. (4.19) qui décrivent totalement la dynamique du système. Evidemment la sortie  $z^{\text{crit}}$  ne figure pas ici, car elle est utilisée à des fins de modélisation. Un interrupteur fait le choix entre les solutions InfC où  $u_k = -\mathcal{K}_\infty x_k$  ou bien Infl où  $u_k = -\mathcal{K}_\infty \hat{x}_{k|k-1}$ , l'estimée  $\hat{x}_{k|k-1}$  étant la sortie du filtre de Kalman donnée par l'Eq. (4.39).

### 4.4 L'approche LQG en OA

#### 4.4.1 Travaux précédents : de l'intégrateur à la commande LQG

Comme cela a déjà été constaté à la section 2.8.2.1, l'intégrateur est le régulateur de base en OA. Des versions plus abouties, notamment par optimisation de la bande passante par ajustement du gain [Gendron et Léna, 1994, Ellerbroek *et al.*, 1994, Dessenne *et al.*, 1998b] ou, de façon équivalente, du temps de pause [Correia *et al.*, 2006], ont été proposées tout en gardant la structure commune de ce type de régulation. Cependant, malgré ces efforts, des limitations structurelles de l'intégrateur ne peuvent pas être contournées. A la section 4.6.1, la réinterprétation sous formalisme d'état de ce régulateur originalement menée par [Kulcsár *et al.*, 2006], mettra en évidence que le modèle

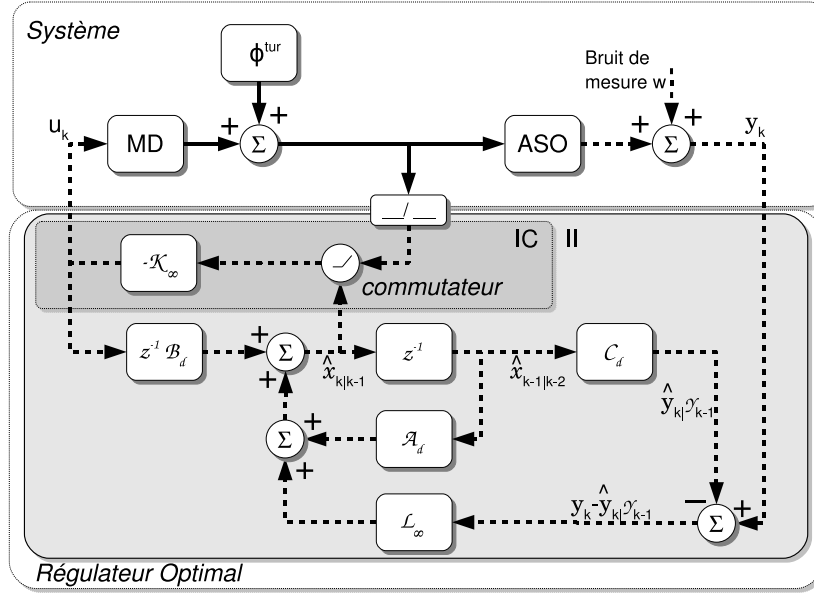


FIG. 4.3 – Structure complète du régulateur LQG. Un modèle du *système* réel est employé dans la définition du régulateur optimal. Ce régulateur vise à minimiser le critère de l'Eq. (4.17). Le commutateur permet de distinguer deux cas, l'information complète où l'état est parfaitement connu et le cas information incomplète où le régulateur est donné par l'Eq. (4.23). L'état est alors estimée à partir des mesures bruitées et retardées, conformément à l'Eq. (4.40).

d'évolution de phase inhérent, souvent dit caché, est instable. Le choix de la matrice de gain impose aussi des limitations : d'une part sur le choix du gain, d'autre part sur le niveau de troncature appliqué pour obtenir une inverse généralisée de la matrice d'interaction qui soit satisfaisante du point de vue de la performance [§2.8.2.1]. Associée à la troncature [§3.2.3] la propagation de bruit n'est donc pas maîtrisée, une situation préoccupante à laquelle sont confrontés nombre de systèmes d'OA. Les limitations de l'intégrateur ne s'arrêtent pas là. Une discussion plus détaillée se trouve à la section 2.8.2.1, notamment en ce qui concerne l'adéquation aux OA grand champ. [Le Louarn, 2002] exploitent en boucle fermée la reconstruction optimale statique en ajustant soigneusement le poids des *a priori*, ce qui revient à modifier le RSB implicite et donc le comportement potentiellement dégradé en observations à faible flux.

Des stratégies de régulation intermédiaires entre l'intégrateur et la commande LQG ont été proposées par [Gilles, 2005] et [Béchet *et al.*, 2007]. L'idée principale commune à ces deux structures étant de rester dans un cadre de reconstruction optimale de front d'onde statique. Pour cela le fonctionnement en boucle fermée est reconfiguré de façon à pouvoir obtenir des pseudo-mesures boucle ouverte appliquées ensuite au reconstruteur *MMSE*. Dans l'approche *POLC*, un filtrage temporel est réalisé pour garantir la stabilité en boucle fermée. La robustesse a été analysée par [Piatrou et Gilles, 2005] et la performance comparée à celle de la commande LQG par [Piatrou et Roggemann, 2007].

L'approche de [Béchet *et al.*, 2007] est similaire au *POLC*. L'originalité concerne la construction du reconstruteur optimal, celui-ci étant basé sur une description fractale de la phase. L'idée de base est la même, c'est-à-dire, un problème inverse de reconstruction de phase en boucle ouverte [Tallon *et al.*, 2007] à partir des mesures boucle fermée compensées de la correction apportée par le



MD ; la régulation en boucle fermée est cependant différente. [Béchet *et al.*, 2007] opte par l'approche IMC [Morari et Zafriou, 1989, Rivera *et al.*, 1985], consistant à estimer la phase boucle ouverte à partir d'un modèle interne du processus physique à réguler. Ainsi, surgit le *FrIM-IMC*. Le *POLC* et le *FrIM-IMC* sont tous deux réinterprétés sous forme d'état à la section 4.6. Comme pour l'intégrateur, la structure des observateurs sera mise en évidence ainsi que le modèle d'évolution de phase. Ceci permettra d'expliquer le comportement présumé en différents régimes de bruit.

Les premiers travaux de commande optimale en OA employant l'approche LQG en temps continu ont été menés par [Paschall *et al.*, 1991] et [Paschall et Anderson, 1993]. La solution continue est ensuite discrétisée de façon exacte pour l'appliquer à l'environnement à temps discret où elle est sensée fonctionner. Cependant, le critère d'optimisation n'est pas celui de la minimisation de la variance de phase résiduelle.

Une loi de commande proche du LQG fut suggérée par [Gavel, 2003], seulement la stationnarité du modèle d'évolution de phase a été sacrifiée. Ces travaux ont par la suite été mis à profit dans l'approche proposée par [Wiberg *et al.*, 1994a, Wiberg *et al.*, 1994b]. Toutefois, les dynamiques temporelles des processus physiques sont négligées, ce qui limite fortement leur intérêt.

Une solution hybride entre LQG et commande modale a été proposée dans [Looze *et al.*, 2003] ; cette commande associe une matrice de découplage statique et une série de régulateurs LQG monovariabiles. La problématique de la discrétisation, qui a été abordée ici en utilisant des variables de phase moyennées sur des périodes d'échantillonnage successives, suivant l'approche proposée dans [Le Roux *et al.*, 2004], a été également abordée dans [Looze, 2006, Looze, 2007]. Cependant, le critère discret proposé dans ces deux contributions régularise le critère en ajoutant une pénalisation supplémentaire sur la commande, de sorte que la commande obtenue n'est plus rigoureusement optimale. De plus, le choix particulier de vecteur d'état fait que le calcul de la commande optimale requiert la résolution d'une équation de Riccati de commande y compris dans le cas d'un MD à réponse infiniment rapide. En contrepartie, cette approche s'étend naturellement au cas de miroirs avec dynamique [Looze, 2008, Looze, 2009] , problématique qui sera abordée au chapitre 6.

[Poyneer et Véran, 2008] proposent une commande LQG sur une base spécialement adaptée aux grands systèmes. Elle se fonde sur l'approche modale en espace de Fourier présentée par [Poyneer *et al.*, 2007]. Un avantage clair de ce type de modélisation est que le comportement Taylor est facilement reproduit par des modèles AR simples, correspondant à un décalage spatial des modes de Fourier. La concentration de l'énergie turbulente dans ce mode de translation reste encore à quantifier, un travail déjà commencé par [Poyneer et Véran, 2008] et [Poyneer *et al.*, 2009].

La solution présentée ici se base sur les travaux de [Le Roux, 2003, Le Roux *et al.*, 2004] en considérant les miroirs déformables infiniment rapides. Le modèle d'état à temps discret proposé permettait la minimisation de la variance d'erreur résiduelle en OA et OAMC. [Kulcsár *et al.*, 2006] montre l'optimalité de cette loi de commande discrète vis-à-vis du critère continu de départ. Des travaux postérieurs, basés sur la même solution, ont été menés, notamment ceux de [Petit *et al.*, 2004] et de [Petit, 2006] où il est suggéré une simplification du vecteur d'état et une extension de la solution à la réjection de vibrations. Ces nouveautés ont été testés expérimentalement par [Petit *et al.*, 2008, Petit *et al.*, 2009] déjà pour l'OA hors-axe (voir section 2.7 pour ce concept d'OA) ; le potentiel des modèles AR pour appréhender l'évolution temporelle de la phase est exploité et expliqué. La commande LQG ainsi enrichie de ces multiples contributions a ensuite été appliquée à l'OA grand champ par [Costille *et al.*, 2009, Costille, 2009].

Dans ce mémoire, les lois de commande LQG précédentes sont réinterprétées et un modèle d'état encore plus compact sera obtenu à la section 4.4.4. Le choix des paramètres des modèles AR sera remis en question à la section 4.5 où le comportement performant de ces modèles est justifié puis optimisé.



#### 4.4.2 Définition du critère d'optimalité

Le critère de minimisation adopté est celui de la variance minimal de phase résiduelle  $\sigma_{\phi^{\text{res}}}^2$  sur la pupille du télescope. La minimisation de ce critère équivaut à maximiser le rapport de Strehl [Herrmann, 1992].

Il s'agit bien d'un critère continu (l'évolution des phases de perturbation et correction est continue dans le temps) qui sera exprimé par la forme discrète équivalente de l'Eq. (4.17).

En termes mathématiques,  $\sigma_{\phi^{\text{res}}}^2$  s'écrit presque sûrement (p.s.)

$$\sigma_{\phi^{\text{res}}}^2 \stackrel{\text{p.s.}}{=} J^c(u) \triangleq \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \|\phi^{\text{res}}(t)\|^2 dt, \quad \text{Critère d'optimalité continu} \quad (4.60)$$

$\phi^{\text{res}}$  étant la phase résiduelle la différence des phase de perturbation et de correction, i.e.  $\phi^{\text{res}} = \phi^{\text{tur}} - \phi^{\text{cor}}$  – se référer à la Fig. 2.20 pour plus de détails sur le système d'OA asservi en boucle fermée – l'Eq.(4.60) se réécrit

$$J^c(u) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \|\phi^{\text{tur}}(t) - \phi^{\text{cor}}(t)\|^2 dt. \quad (4.61)$$

Du point de vue de la théorie de la commande, l'OA s'inscrit tout naturellement dans un problème de rejet de perturbation, puisque la commande  $u$  ne peut pas agir sur la phase  $\phi^{\text{tur}}$ .

Soit  $J^c(u)_k$  la valeur moyenne de la variance de phase résiduelle durant l'intervalle de temps  $t \in [kT_s, (k+1)T_s[$

$$J^c(u)_k \triangleq \frac{1}{T_s} \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} \|\phi^{\text{tur}}(t) - \phi^{\text{cor}}(t)\|^2 dt. \quad \text{Coût incrémental} \quad (4.62)$$

Avec cette notation, le critère à temps continu de l'Eq.(4.60) se réécrit comme une somme à horizon infini selon

$$J^c(u) = \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{M} \sum_{k=0}^M J^c(u)_k. \quad (4.63)$$

A noter que, par construction,  $J^c(u)_k$  ne dépend que des décisions de commande prises jusqu'à  $t = kT_s$ , autrement dit, de la séquence discrète  $\{u_0, \dots, u_k\}$ .

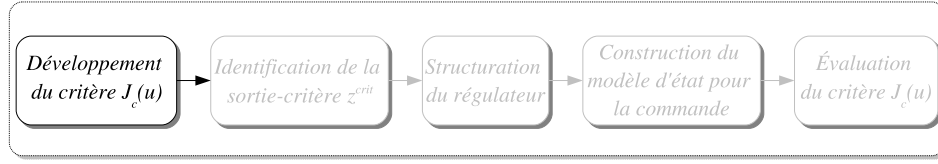
#### 4.4.3 Développement de la solution LQG

Le développement de la solution LQG est présentée étape par étape suivant le schéma de la Fig. 4.2.

##### 4.4.3.1 Développement du critère

Si le miroir est considéré comme infiniment rapide, sa dynamique peut être réduite à sa matrice de gain statique  $N \in \mathbb{R}^{n_t \times n_m}$ , la matrice d'influence du miroir. Par conséquent

$$\phi^{\text{cor}}(t) = Nu_k \quad \forall \quad kT_s \leq t < (k+1)T_s. \quad \text{Phase de correction} \quad (4.64)$$



[Kulcsár *et al.*, 2006] montrent que la commande VM – c’est-à-dire, la commande minimisant le critère continu  $J^c(u)$  – s’obtient en minimisant le critère discret équivalent

$$J^d(u) = \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \|\bar{\phi}_{k+1}^{\text{tur}} - Nu_k\|^2, \quad (4.65)$$

où

$$\bar{\phi}_{k+1}^{\text{tur}} = \frac{1}{T_s} \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} \phi^{\text{tur}} dt. \quad (4.66)$$

Puisque  $J^d(u)$  s’obtient à partir de  $J^c(u)$  en rajoutant un terme indépendant de la commande  $u$  dans l’Eq. (4.68), cela garanti que

$$\arg \min_{\mathcal{U}} J^c(u) = \arg \min_{\mathcal{U}} J^d(u), \quad (4.67)$$

ce qui établit l’équivalence des deux solutions. Ces deux critères sont liés par

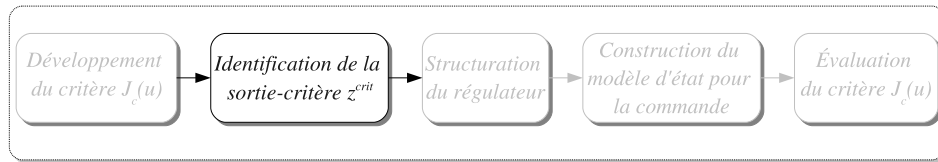
$$J^c(u) = J_r^d(u) + \delta J(T_s), \quad (4.68)$$

avec  $\delta J(T_s)$  l’erreur ultime du fait de remplacer des variables continues par des variables discrètes moyennées :

$$\delta J(T_s) = \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \left( \frac{1}{T_s} \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} \|\phi^{\text{tur}}(t) - \bar{\phi}_{k+1}^{\text{tur}}\|^2 dt \right). \quad (4.69)$$

[Petit, 2006] montre que cette erreur, pour les temps d’intégration souvent utilisés de l’ordre de quelques centaines de Hertz, est petite, voire même négligeable pour certains systèmes.

#### 4.4.3.2 Identification de la sortie-critère



En développant l’Eq. (4.65), la comparaison directe avec l’Eq. (4.17) conduit à prendre comme sortie-critère

$$z_k^{\text{crit}} = \bar{\phi}_{k+1}^{\text{tur}} \quad (4.70)$$

et pour les matrices de pondération LQ,

$$Q = I \geq 0, \quad S = -N, \quad R = N^T N > 0. \quad (4.71)$$

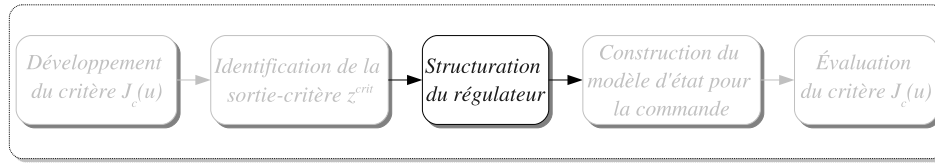
On vérifie immédiatement que

$$Q - SR^{-1}S^T = I - N \left( N^T N \right)^{-1} N \geq 0. \quad (4.72)$$

Le critère équivalent discret devient alors

$$J^d(u) = \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \left( \begin{pmatrix} \bar{\phi}_{k+1}^{\text{tur}} \\ u_k \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} I & -N \\ -N^T & N^T N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\phi}_{k+1}^{\text{tur}} \\ u_k \end{pmatrix} \right). \quad (4.73)$$

#### 4.4.3.3 Structuration du régulateur



La commande optimale  $u_k$  en InfC est obtenue en projetant orthogonalement la phase moyenne  $\bar{\phi}_{k+1}^{\text{tur}}$  sur l'espace miroir. En effet,  $J^d(u)_k$ , défini par l'Eq. (4.62) ne dépend ici que de  $u_k$ . La commande optimale s'écrit donc

$$\begin{aligned} u_k &= \arg \min_u \| \bar{\phi}_{k+1}^{\text{tur}} - Nu \|^2 \\ &= (N^T N)^{-1} N^T \bar{\phi}_{k+1}^{\text{tur}}. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Ceci correspond au retour d'état  $u_k = \mathcal{K}_\infty \hat{x}_k$ , avec  $\mathcal{K}_\infty = (N^T N)^{-1} N^T \mathcal{C}_d^{\text{crit}}$ .

Cette solution analytique obtenue de la minimisation de l'Eq. (4.65) évite ainsi la résolution de la Riccati de commande (4.22). La matrice d'influence du MD est supposée de rang maximal, autrement dit  $(N^T N)$  est inversible.

Deux aspects particuliers sont à noter. Cette solution (a.) ne dépend d'aucune hypothèse particulière sur la phase de perturbation et (b.) en information complète, la solution fait intervenir la phase moyenne sur l'intervalle immédiatement postérieur à l'application de la commande. Ceci est spécialement intéressant puisque pour l'information incomplète, la mesure est elle aussi une fonction de la phase moyenne intégrée. C'est ce qui sera présenté dans la section suivante.

#### Structure du régulateur en information incomplète

Puisque les mesures ASO sont une fonction de la phase moyenne (cf. section 2.5.1.1) ces mesures s'expriment à partir de  $\bar{\phi}^{\text{tur}}$ .

Dans le cas linéaire, les mesures fournies par un système d'OA s'écrivent en première approximation sous la forme

$$y_k = D \bar{\phi}_{k-1}^{\text{res}} + w_k = D \bar{\phi}_{k-1}^{\text{tur}} - D N u_{k-2} + w'_k, \quad (4.75)$$

où  $w'_k$  est un bruit blanc, gaussien et à moyenne nulle,  $w'_k \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_{w'})$ . Les indices retrouvés à l'Eq. (4.75) sont détaillés sur la Fig. 2.14. Ces hypothèses sur les retards de l'ASO ne sont pas uniques : l'approche présentée ici aurait pu être aussi bien aisément adaptée à un autre chronogramme d'opérations. Dans l'Eq. (4.75), l'opérateur linéaire  $D \in \mathbb{R}^{s \times n}$  est spécifique de l'ASO mis en place pour faire la mesure (voir section 2.5.1.1).

En supposant que  $\bar{\phi}^{\text{tur}}$  est un processus stochastique hilbertien, le théorème de séparation s'applique - section 4.3.1.1 ; la commande à VM s'écrit alors

$$u_k = (\mathbf{N}^T \mathbf{N})^{-1} \mathbf{N}^T \hat{\bar{\phi}}_{k+1|\mathcal{Y}_k}^{\text{tur}}, \quad (4.76)$$

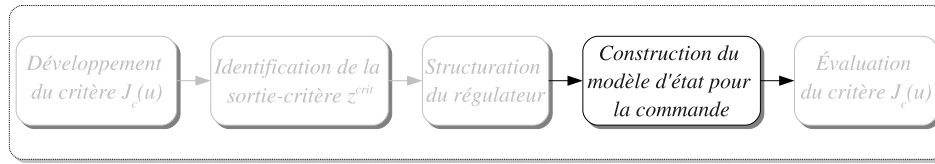
où  $\hat{\bar{\phi}}_{k+1|\mathcal{Y}_k}^{\text{tur}}$  représente l'espérance de  $\bar{\phi}_{k+1}$  conditionnellement à la séquence  $\mathcal{Y}_k$  de toutes les mesures disponibles à l'instant  $t = kT_s$ , soit  $\mathcal{Y}_k = \{y_0, \dots, y_k\}$ . Afin de formaliser le problème d'estimation optimal sous forme LQG standard, on introduit l'observation  $z_k$ , une pseudo-mesure définie par

$$z_k = y_{k+1} = \mathbf{D} \bar{\phi}_k^{\text{tur}} - \mathbf{D} \mathbf{N} u_{k-1} + w_k, \quad (4.77)$$

où  $w_k = w'_{k+1}$ , ce qui permettra par la suite de tenir compte du retard de mesure de façon simple. Du point de vue mathématique, par la suite la notation  $\hat{x}_{k|k-1}$  définit l'espérance de  $x_k$  conditionnellement à  $\mathcal{Z}_{k-1} = \{z_0, \dots, z_{k-1}\} = \mathcal{Y}_k$ .

Avec ces définitions, un modèle stochastique permettant de décrire les sorties et la commande optimale sera construit dans l'étape suivante [§4.4.4], ce qui permettra d'achever la synthèse de la commande optimale conformément à ce qui a été établie à la section 4.3 .

#### 4.4.4 Modèle pour la commande



Comme modèle pour la commande, [Le Roux *et al.*, 2004] a proposé un modèle non minimal à cinq états (trois occurrences de phase et deux de commande) alors que [Petit, 2006] propose déjà un modèle plus compact à quatre états (deux occurrences de phase et deux de commande) en notant que l'estimée de phase  $\hat{\bar{\phi}}_{k+1}^{\text{tur}}$  n'était pas nécessairement une composante de l'état puisque cette composante peut être obtenue en multipliant  $\hat{\bar{\phi}}_k^{\text{tur}}$  par  $\mathcal{A}_{\text{tur}}$ . Il faut alors introduire une légère modification dans le projecteur qui s'écrit  $(\mathbf{N}^T \mathbf{N})^{-1} \mathbf{N}^T \mathcal{A}_{\text{tur}}$ .

Le modèle proposé ici est encore plus compact. Trois composantes (deux occurrences de phase et une de commande) s'avèrent nécessaires pour décrire les observations  $z_k$  qui sont, par choix de conception, avancées dans le temps et produire les estimées de phase utilisées lors de la projection sur l'espace miroir.

Un modèle d'état visant la description complète des observations doit inclure explicitement  $(\bar{\phi}_k, u_{k-1})$  - Eq. (4.77). La prédiction de la phase moyenne à un pas  $\bar{\phi}_{k+1}$  y figurera aussi pour obtenir les décisions de commande de l'Eq. (4.76). Puisque la sortie-critère est tout simplement  $\bar{\phi}_k^{\text{tur}}$ , la composition du vecteur d'état est ainsi complètement déterminée, soit

$$x_k \triangleq \begin{pmatrix} \bar{\phi}_{k+1}^{\text{tur}} \\ \bar{\phi}_k^{\text{tur}} \\ u_{k-1} \end{pmatrix} \quad \text{Composantes de l'état} \quad (4.78)$$

**Hypothèse 4.1 Evolution temporelle de la perturbation de phase.**

L'évolution temporelle de la phase est caractérisée par le modèle auto-régressif (AR) du premier ordre suivant

$$\bar{\phi}_{k+1}^{\text{tur}} = \mathcal{A}_{\text{tur}} \bar{\phi}_k^{\text{tur}} + v_k, \quad (4.79)$$

où  $\mathcal{A}_{\text{tur}}$  est la matrice de la dynamique temporelle. Le choix des paramètres de  $\mathcal{A}_{\text{tur}}$  sera discuté à la section 4.5. Dans l'Eq. (4.79),  $v_k$  est un bruit blanc, gaussien et de matrice de variance  $\Sigma_v$  connue.

Tout ceci est regroupé dans un unique modèle d'état

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \bar{\phi}_{k+2}^{\text{tur}} \\ \bar{\phi}_{k+1}^{\text{tur}} \\ u_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{\text{tur}} & 0 & 0 \\ \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\phi}_{k+1}^{\text{tur}} \\ \bar{\phi}_k^{\text{tur}} \\ u_{k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} u_k + \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} v_k \\ z_k = \mathbf{D} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} & -\mathbf{N} \end{pmatrix} x_k + w_k \\ z_k^{\text{crit}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \end{pmatrix} x_k \end{array} \right. \quad (4.80)$$

Pour réintroduire le retard de mesure d'une trame temporairement négligé, la version prédicteur du régulateur donnée par l'Eq. (4.23), est alors choisie

$$u_k = \mathcal{K}_{\infty} \mathcal{C}_d^{\text{crit}} \hat{x}_{k|k-1}. \quad (4.81)$$

Cette version est conditionnée à  $\mathcal{Z}_{k-1}$  ou de façon équivalente à  $\mathcal{Y}_k$ . Ceci assure la prise en compte mathématiquement rigoureuse des retards explicités à la Fig. 2.14 dans le modèle complet des Eqs. (4.80-4.81). Le fait que  $\hat{x}_{k|k-1}$  soit utilisé et non  $\hat{x}_{k|k}$  revient à associer le retard pur d'une trame à la commande plutôt qu'à la mesure.

Avec la définition des matrices de pondération dans l'Eq. (4.72), le gain de Kalman  $\mathcal{L}_{\infty}$  de l'Eq. (4.41) peut alors être déterminé à partir de la solution de l'équation de Riccati d'estimation de l'Eq. (4.42). Ce gain sera utilisé lors de l'estimation et prédiction récursives de l'état  $\hat{x}_{k|k-1}$  tel que définit à l'Eq. (4.40). De plus, la performance (en termes de variance de phase résiduelle) sera quantifiée à partir du gain de Kalman  $\mathcal{K}_{\infty}$ , les matrices de pondération.

Une analogie remarquable peut être faite avec le reconstruteur statique à VM explicité au chapitre 3. La commande était alors obtenue par la projection orthogonale de la phase reconstruite sur l'espace engendré par les fonctions d'influence du MD. Toutefois, des différences majeures existent : malgré cette projection similaire dans les deux approches, dans le premier cas il s'agit d'une problématique de reconstruction statique de front d'onde alors que le cas présent s'applique aux systèmes asservis en boucle fermée. La dérivation du reconstruteur statique optimal par application de l'approche LQG aux OA boucle ouverte sera accomplie à la section 4.4.6.

**4.4.4.1 Propriétés du modèle****Commandabilité et observabilité**

Comme l'a montré [Petit, 2006], le système n'est structurellement ni commandable ni observable.

En régime de rejet de perturbations, la commandabilité n'est clairement pas présente. L'observabilité du système n'est pas assurée, du fait de la présence de retards. Toutefois, d'après [Petit, 2006], la partie non observable de l'état est détectable [voir définition au paragraphe 4.5].

**Stabilité en boucle fermée**

La stabilité de la boucle est assurée si les matrices  $(\mathcal{A}_d - \mathcal{K}_\infty \mathcal{B}_d)$  et  $(\mathcal{A}_d - \mathcal{L}_\infty \mathcal{C}_d)$  sont toutes deux stables. Ceci est garanti sous les mêmes hypothèses qui assurent l'existence d'une solution unique pour les équation de Riccati de commande et d'estimation.

#### 4.4.4.2 Fonctions de transfert : un exemple sur le mode tip/tilt

Le modèle de la section 4.3.3 est ici exploité pour illustrer le passage du formalisme d'état aux fonctions de transfert. Un aspect remarquable, bien que tout à fait prévu, c'est que la fonction de réjection ne présente pas aux basses fréquences une réjection  $\propto f^2$  propre à l'intégrateur, mais plutôt un comportement  $\propto f^0$ . Ce comportement est dû à la prise en compte d'un modèle de perturbation (dans cet exemple un modèle AR1) dont la FT est  $\propto f^0$  en régime BF. De plus, selon le théorème de Bode [Wu et Jonckheere, 1992], une réjection adéquate en BF rend possible une meilleure réjection en HF, du moins en cas de fort RSB. Une analyse par fonctions de transferts permet de clarifier le fonctionnement de la commande optimale et ainsi de comprendre son efficacité.

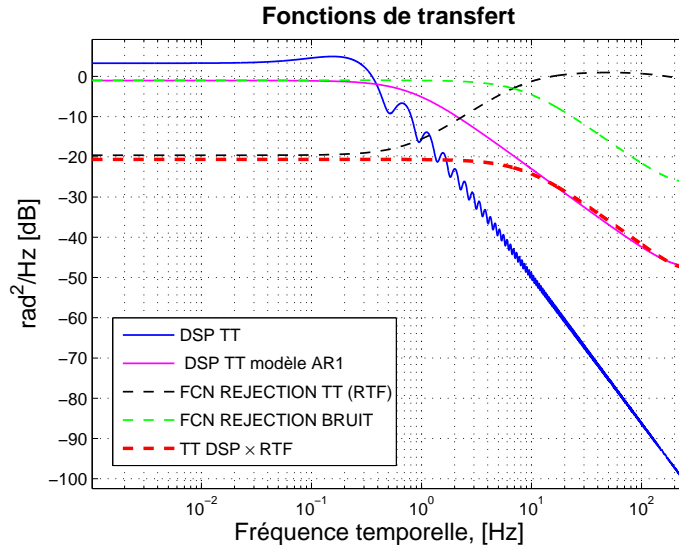


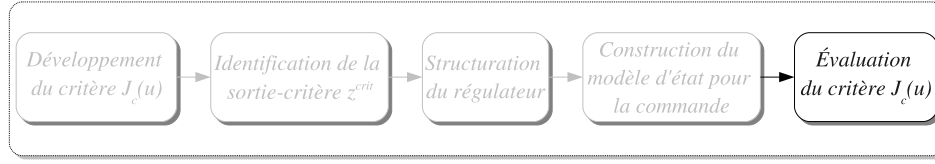
FIG. 4.4 – Exemple de fonctions de transfert associées au modèle de l'Eq. (4.80). Le cas scalaire du tip/tilt est illustré. La fonction de réjection aux BF se caractérise par un plateau. Après multiplication par la DSP de la perturbation, ceci garantit une réjection plate sur une grande plage de fréquences.

Les courbes sur la Fig. 4.4 illustrent les transferts propres à la commande LQG. Les fonctions de réjection de phase et bruit (courbes rouge et verte respectivement) se caractérisent par un plateau aux BF puis une atténuation aux HF. Les compromis imposés par le théorème de Bode sont ainsi mieux exploités : la réjection fréquentielle dépend donc du contenu fréquentiel de la perturbation, les erreurs étant aussi plates (sur le plan fréquentiel) que possible.

#### 4.4.5 Évaluation de performance

La valeur du critère à temps continu peut se calculer à partir de l'identité

$$J^c(u) \stackrel{p.s.}{=} \delta(T_s) + \text{trace}(W\Sigma_f), \quad (4.82)$$



où

$$W = \begin{pmatrix} (\mathcal{C}_d^{\text{crit}})^T Q \mathcal{C}_d^{\text{crit}} & (\mathcal{C}_d^{\text{crit}})^T S \mathcal{K}_\infty \\ \mathcal{K}_\infty^T S^T \mathcal{C}_d^{\text{crit}} & \mathcal{K}_\infty^T R \mathcal{K}_\infty \end{pmatrix}.$$

**Démonstration :** La démonstration commence par énoncer la propriété suivante.

**Propriété 4.5 Covariance de l'état  $x$  :**

Soit le système

$$\zeta_{k+1} = \mathcal{A}\zeta_k + \eta_k \quad (4.83)$$

pour lequel  $\mathcal{A}$  est stable, i.e. toutes ses valeurs propres  $|\lambda_i| < 1$ , et  $\eta_k$  est un bruit blanc gaussien de variance  $\Sigma_\eta$ , alors  $x_k$  converge vers un processus gaussien dont la variance est donnée par la solution de l'équation discrète de Lyapunov [Söderström, 2002, Anderson et Moore, 1995b]

$$\Sigma_\zeta = \mathcal{A}\Sigma_\zeta\mathcal{A}^T + \Sigma_\eta, \quad (4.84)$$

où  $\Sigma_\zeta$  est la matrice de covariance en boucle fermée de l'état.

En outre, pour toute matrice définie positive

$$P = \begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix} \geq 0, \quad (4.85)$$

et avec  $\Sigma_\zeta$

$$\mathbb{E} \{ \zeta^T P \zeta \} = \text{trace} \{ P \Sigma_\zeta \}. \quad (4.86)$$

△

Le critère de l'Eq. (4.65) est presque sûrement (p.s.) égal à l'espérance d'une forme quadratique. Avec la commande du type  $u_k = -\mathcal{K}_\infty \hat{x}_{k|k-1}$  on obtient donc

$$\begin{aligned} J^c(u) &\stackrel{\text{p.s.}}{=} \delta J(T_s) + \mathbb{E} \left\{ (z_k^{\text{crit}})^T Q z_k^{\text{crit}} + u_k^T R u_k - 2 (z_k^{\text{crit}})^T S u_k \right\} \\ &\stackrel{\text{p.s.}}{=} \delta J(T_s) + \mathbb{E} \left\{ x_k^T \left[ (\mathcal{C}^{\text{crit}})^T Q \mathcal{C}^{\text{crit}} \right] x_k + u_k^T R u_k - 2 x_k^T \left[ (\mathcal{C}^{\text{crit}})^T S \right] u_k \right\} \\ &\stackrel{\text{p.s.}}{=} \delta J(T_s) + \end{aligned} \quad (4.87)$$

$$\mathbb{E} \left\{ x_k^T \left[ (\mathcal{C}^{\text{crit}})^T Q \mathcal{C}^{\text{crit}} \right] x_k + \hat{x}_{k|k-1}^T (\mathcal{K}_\infty)^T R \mathcal{K}_\infty \hat{x}_{k|k-1} + 2 x_k^T \left[ (\mathcal{C}^{\text{crit}})^T S \right] \mathcal{K}_\infty \hat{x}_{k|k-1} \right\}. \quad (4.88)$$

Pour évaluer l'Eq. (4.87), il faut pouvoir calculer les espérances des termes en  $x_k$  et  $\hat{x}_{k|k-1}$ . Pour cela soit l'état augmenté  $x_f = \begin{pmatrix} x_k^T & \hat{x}_{k|k-1}^T \end{pmatrix}^T$ . Les équations de récurrence de l'état s'écrivent

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \mathcal{A}_d x_k + \mathcal{B}_d u_k + \Gamma_d v_k \\ &= \mathcal{A}_d x_k - \mathcal{B}_d \mathcal{K}_\infty \hat{x}_{k|k-1} + \Gamma_d v_k. \end{aligned} \quad (4.89)$$

L'état estimé par le filtre de Kalman peut se s'écrire

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1|k} &= \mathcal{A}_d \hat{x}_{k|k-1} + \mathcal{B}_d u_k + \mathcal{L}_\infty (z_k - \mathcal{C}_d \hat{x}_{k|k-1}) \\ &= (\mathcal{A}_d - \mathcal{B}_d \mathcal{K}_\infty - \mathcal{L}_\infty \mathcal{C}_d) \hat{x}_{k|k-1} + \mathcal{L}_\infty \mathcal{C}_d x_k + \mathcal{L}_\infty w_k.\end{aligned}\quad (4.90)$$

Ceux-ci et les Eq. (4.89) et Eq. (4.90) définissent le système augmenté

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \hat{x}_{k+1|k} \end{pmatrix} = \mathcal{A}_f \begin{pmatrix} x_k \\ \hat{x}_{k|k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Gamma_d & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_\infty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_k \\ w_k \end{pmatrix}, \quad (4.91)$$

où

$$\mathcal{A}_f \triangleq \begin{pmatrix} \mathcal{A}_d & -\mathcal{B}_d \mathcal{K}_\infty \\ \mathcal{L}_\infty \mathcal{C}_d & \mathcal{A}_d - \mathcal{B}_d \mathcal{K}_\infty - \mathcal{L}_\infty \mathcal{C}_d \end{pmatrix}. \quad (4.92)$$

La matrice de covariance  $\Sigma_f$  de l'état augmenté  $x_f$  s'écrit

$$\Sigma_f = \begin{pmatrix} \Sigma_x & \Sigma_{x_k, x_{k|k-1}} \\ \Sigma_{x_k, x_{k|k-1}} & \Sigma_{x_{k|k-1}} \end{pmatrix}, \quad (4.93)$$

et selon la propriété 4.5, la solution est obtenue en résolvant l'équation de Lyapunov à temps discret  $\Sigma_f = \mathcal{A}_f \Sigma_f \mathcal{A}_f^\top + \Sigma'_v$ , où  $\Sigma'_v$ , la matrice de covariance du bruit d'état

$$\Sigma'_v \triangleq \begin{pmatrix} \Gamma_d \Sigma_v \Gamma_d^\top & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_\infty \Sigma_w \mathcal{L}_\infty^\top \end{pmatrix}, \quad (4.94)$$

puisque  $v_k$  et  $w_k$  sont indépendantes et de matrices de covariance  $\Sigma_v$  et  $\Sigma_w$  respectivement.

Le second résultat dans la propriété 4.5 établit que le critère à temps continu  $J^c(u)$  s'écrit

$$\begin{aligned}J^c(u) &\stackrel{p.s.}{=} \delta(T_s) + \mathbb{E}(x_f^\top W x_f) \\ &\stackrel{p.s.}{=} \delta(T_s) + \mathbb{E} \left( \begin{pmatrix} x_k \\ \hat{x}_{k|k-1} \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} (\mathcal{C}_d^{\text{crit}})^\top Q \mathcal{C}_d^{\text{crit}} & (\mathcal{C}_d^{\text{crit}})^\top S \mathcal{K}_\infty \\ \mathcal{K}_\infty^\top S^\top \mathcal{C}_d^{\text{crit}} & \mathcal{K}_\infty^\top R \mathcal{K}_\infty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ \hat{x}_{k|k-1} \end{pmatrix} \right) \\ &\stackrel{p.s.}{=} \delta(T_s) + \text{trace}(W \Sigma_f).\end{aligned}\quad (4.95)$$

■

En résumé, les matrices  $Q$ ,  $R$ ,  $S$ , le régulateur  $\mathcal{K}_\infty$  et le gain de l'observateur  $\mathcal{L}_\infty$  ont été déterminés. Dans le cas optimal, ces deux derniers requièrent la résolution des équations de Riccati associées. A partir de l'Eq. (4.95) le critère de performance  $J_c(u)$  peut être quantifié soit dans le cas optimal soit dans des cas sous-optimaux.

Cet outil permet : a) de synthétiser le régulateur optimal et b) d'évaluer l'impact des différents paramètres du système sur la performance finale (en variance de phase résiduelle). Cet outil pourra donc être utile lors de la conception des systèmes et des budgets d'erreur associés, en évitant de mettre en place une simulation de bout-en-bout, généralement bien plus complexe et détaillée mais potentiellement plus longue et moins souple que la procédure décrite ici.



#### 4.4.6 Commande optimale statique pour les OA en boucle ouverte

Dans le chapitre 3, l'estimateur optimal pour le cas statique proposé pour l'OA classique a été présenté. Ce résultat d'estimation statique peut également être retrouvé en posant le problème dans le formalisme d'état et en appliquant l'approche LQG telle qu'elle vient d'être détaillée. L'estimation statique a pour principe de déterminer, à partir de chaque mesure  $y_k$  prise isolément la meilleure estimation de  $\bar{\phi}^{\text{tur}}$ . Il n'y a donc pas de correction ( $\bar{\phi}^{\text{cor}} = 0$ ) ni de retard. Il s'avère donc inutile d'introduire dans le vecteur d'état de l'Eq. (4.80) les composantes liés à la commande  $u_{k-1}$  comme pour la boucle fermée.

Pour le cas de boucle ouverte statique, étant donné que les événements sont décorrélés d'un instant à l'autre, l'évolution de la phase ne sera pas prise en compte. Cela revient en fait à poser une équation d'évolution de la phase turbulente qui exprime que la phase évolue d'un instant à l'autre de façon totalement non corrélée, comme un bruit blanc. De ce fait,  $\mathcal{A}_{\text{tur}} = 0$ . L'état devient tout simplement

$$x_k = \bar{\phi}_{k+1} = v_k, \quad (4.96)$$

où  $v_k$  est un bruit blanc à moyenne nulle. Ceci implique que la matrice de covariance de  $v_k$  est en fait la matrice  $\Sigma_\phi$ .

L'équation de mesure s'écrit par conséquent

$$y_k = Dx_k + w'_k. \quad (4.97)$$

Alors le filtre optimal sous forme estimateur devient :

$$\hat{\phi}_{k|k}^{\text{tur}} = \hat{\phi}_{k|k-1}^{\text{tur}} + \mathcal{H}_\infty \left( y_k - D\hat{\phi}_{k|k-1}^{\text{tur}} \right), \quad (4.98)$$

où  $\mathcal{H}_\infty$  est la matrice de filtrage de Kalman adaptée au système statique.  $\hat{\phi}_{k|k-1}^{\text{tur}}$  est l'estimée de la phase à l'instant  $k$  en ne connaissant que les mesures antérieures à  $k$ . Puisque la phase est décorrélée d'un instant à l'autre et qu'elle est à moyenne nulle, cette estimée est égal à 0. Il en découle que

$$\hat{\phi}_{k|k}^{\text{tur}} = \mathcal{H}_\infty y_k. \quad (4.99)$$

De plus, pour le calcul de  $\mathcal{H}_\infty$  (le gain asymptotique), sachant que  $\mathcal{A}_{\text{tur}} = 0$ , la matrice  $\Sigma_\infty = \Sigma_v = \Sigma_\phi$  et donc

$$\mathcal{H}_\infty = \Sigma_\phi D^\top \left( D\Sigma_\phi D^\top + \Sigma_{w'} \right)^{-1}. \quad (4.100)$$

L'estimateur optimal obtenu par un filtre de Kalman dans une modélisation d'état est ainsi

$$\hat{\phi}_{k|k}^{\text{tur}} = \Sigma_\phi D^\top \left( D\Sigma_\phi D^\top + \Sigma_{w'} \right)^{-1} y_k \quad (4.101)$$

c'est-à-dire exactement celui proposé par [Wallner, 1983] et [Fusco *et al.*, 2001]. Il a donc été montré comment interpréter dans un formalisme d'état l'estimateur statique optimal. Ceci montre également la souplesse de l'approche proposée.

Il est temps maintenant d'aborder les aspects liés au modèle d'évolution temporelle de la phase turbulente, ce qui fait l'objet de section suivante.

## 4.5 Modèles d'évolution temporelle de la phase

Le modèle pour la commande repose sur l'hypothèse que l'évolution de la perturbation peut être modélisée par un système d'équations linéaires aux différences.

**Hypothèse 4.2** *La perturbation (atmosphérique ou autre) peut être obtenue en sortie du modèle linéaire et invariant dans le temps (LIT),*

$$\boxed{\begin{cases} x_{k+1}^{\text{tur}} &= \mathcal{A}_{\text{tur}} x_k^{\text{tur}} + v_k \\ \phi_k^{\text{tur}} &= C_{\text{tur}} x_k^{\text{tur}} \end{cases} \quad \text{Modèle d'évolution de phase}} \quad (4.102)$$

dont l'entrée  $v_k$  est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance  $\Sigma_v$ .

### 4.5.1 Méthodes d'identification de paramètres

La littérature est féconde en méthodes d'identification à partir soit de séquences déterministes d'auto-corrélation soit de séquences temporelles. En général ces méthodes se ramènent à la résolution de systèmes d'équations linéaires issues de la minimisation d'un critère. A titre d'exemple, la méthode de Yule-Walker<sup>3</sup> minimise l'erreur de prédiction au sens des moindres carrés (utilise ensuite l'algorithme de Levinson-Durbin).

### 4.5.2 Modèles auto-régressifs du 1er ordre

[Le Roux *et al.*, 2004] et [Petit, 2006] proposent, pour la base des polynômes de Zernike, le modèle auto-régressif découpé mode à mode suivant

$$\bar{\phi}_{k+1,i}^{\text{tur}} = \alpha_i \bar{\phi}_{k,i}^{\text{tur}} + v_{k,i}, \quad (4.103)$$

où  $C_{\text{tur}} = \mathbf{I}$  et  $x_k^{\text{tur}} = \bar{\phi}_k^{\text{tur}}$  dans l'Eq. (4.102) et  $\alpha_i$  est le  $i^{\text{ème}}$  élément de la diagonale de  $\mathcal{A}_{\text{tur}}$ .

La matrice de covariance du bruit d'état s'obtient simplement grâce à l'équation de Lyapunov discrète

$$\Sigma_v = \Sigma_\phi - \mathcal{A}_{\text{tur}} \Sigma_\phi \mathcal{A}_{\text{tur}}^T. \quad (4.104)$$

Une remarque importante sur ce modèle est que, malgré le fait que la matrice  $\mathcal{A}_{\text{tur}}$  soit diagonale, la matrice de covariance du bruit d'état ne l'est généralement pas. Comme elle est choisie de façon à respecter la matrice de covariance  $\Sigma_\phi$  [section 2.3.2], les corrélations des modes sont correctement préservées.

L'auto-corrélation temporelle à  $n$  pas  $\rho_i(n)$  s'écrit

$$\begin{aligned} \rho_i(n) &= \mathbb{E} \left\{ \bar{\phi}_{k+n,i}^{\text{tur}} (\bar{\phi}_{k,i}^{\text{tur}})^T \right\} \\ &= \alpha_i^{|n|} \mathbb{E} \left\{ \bar{\phi}_{k,i}^{\text{tur}} (\bar{\phi}_{k,i}^{\text{tur}})^T \right\} \\ &= \alpha_i^{|n|} \sigma_{\text{tur},i}^2 \end{aligned} \quad (4.105)$$

avec  $\sigma_{\text{tur},i}^2$  la variance du  $i^{\text{ème}}$  mode.

Un modèle d'évolution de phase tel que celui donné par l'Eq. (4.103) assure une décorrélation temporelle exponentielle.

<sup>3</sup>Met en relation les paramètres d'un modèle AR et sa séquence d'auto-corrélation.

**Démonstration : Décorrélation exponentielle du modèle AR1**

La variance de  $\bar{\phi}^{\text{tur},i}$  est donnée par

$$\text{VAR}(\bar{\phi}_i^{\text{tur}}) = \text{E} \left\{ \bar{\phi}_{k_i}^{\text{tur}} (\bar{\phi}_{k,i}^{\text{tur}})^{\text{T}} \right\} - \mu^2 = \frac{\sigma_{v,i}^2}{1 - \alpha_i^2}, \quad (4.106)$$

où  $\sigma_{v,i}^2$  est la variance du bruit d'état et  $\mu = \text{E}\{\bar{\phi}^{\text{tur}}\} = 0$ .

L'auto-corrélation à  $n$  pas se détermine à partir de

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{k+n,i}^{\text{tur}} &= \alpha_i \bar{\phi}_{k+n-1,i}^{\text{tur}} + v_{k+n-1,i} \\ &= \alpha_i (\bar{\phi}_{k+n-2,i}^{\text{tur}} + v_{k+n-1,i}) + v_{k+n-1,i} \\ &= \dots \\ &= \alpha_i^n \bar{\phi}_{k,i}^{\text{tur}} + \epsilon_{n,i}, \end{aligned} \quad (4.107)$$

avec  $\epsilon^i$  une nouvelle séquence de bruit décorrélée de la phase  $\bar{\phi}^{\text{tur},i}$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned} \varrho_i(n) &= \text{E} \left\{ \bar{\phi}_{k+n,i}^{\text{tur}} (\bar{\phi}_{k,i}^{\text{tur}})^{\text{T}} \right\} \\ &= \frac{\sigma_{v,i}^2}{1 - \alpha_i^2} \alpha_i^n \\ &= \frac{\sigma_{v,i}^2}{1 - \alpha_i^2} e^{n \ln \alpha_i}, \end{aligned} \quad (4.108)$$

car deux occurrences de bruit  $v_k$  sont indépendantes. Cette dernière expression assure bien que l'auto-corrélation est une forme exponentielle, comme il avait été avancé.

Pour compléter la démonstration, puisque  $\varrho_i(n) = \varrho_i(-n)$ , alors

$$\varrho_i(n) = \frac{\sigma_{v,i}^2}{1 - \alpha_i^2} e^{|n| \ln \alpha_i}. \quad (4.109)$$

■

La DSP de l'Eq. (4.109) est donc (théorème de Wiener-Khinchine)

$$\text{TF} \left( \frac{\sigma_{v,i}^2}{1 - \alpha_i^2} \alpha_i^{|n|} \right) \propto \frac{\sigma_{v,i}^2}{1 - \alpha_i^2 - 2\alpha_i \cos(\omega)} = \frac{\sigma_{v,i}^2}{|1 - \alpha_i e^{i\omega}|^2}. \quad (4.110)$$

[Le Roux *et al.*, 2004] choisit les  $\alpha_i$  de façon à garantir que la décorrélation est égale à  $1/e$  du maximum pour le temps caractéristique. Celui-ci est défini par l'inverse de la fréquence de coupure  $f_c^r$  de la DSP temporelle de chaque mode,

$$f_c^r \approx 0.3(r_z + 1)V/D, \quad (4.111)$$

où  $r$  est l'ordre radial du  $i^{\text{ème}}$  mode,  $V$  est la vitesse de vent et  $D$  le diamètre du miroir primaire du télescope [Conan *et al.*, 1995]. Ce choix implique alors que

$$\alpha_i = e^{-T_s f_c^r} \approx e^{-0.3(r+1)(V/D)T_s}. \quad (4.112)$$

Sur la Fig. 4.5 les  $\alpha^i$  des premiers 400 polynômes de Zernike sont affichés.

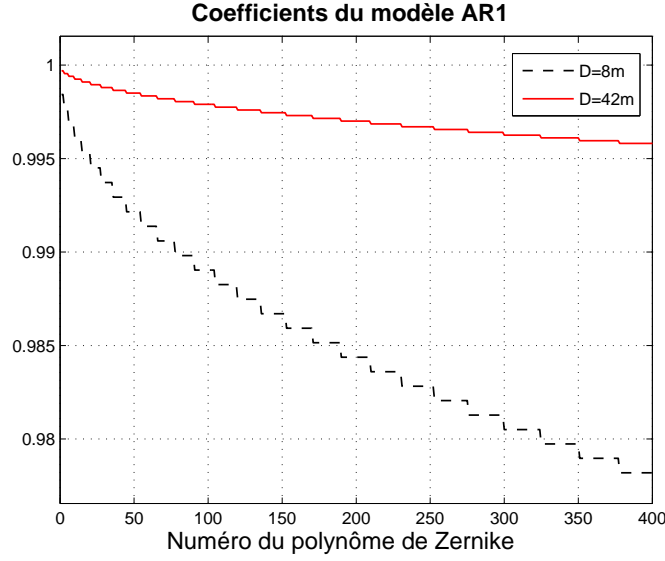


FIG. 4.5 – Coefficients de la matrice  $\mathcal{A}_{\text{tur}}$  pour des télescopes de 8m et 42m.

#### 4.5.2.1 Corrélations temporelles des polynômes de Zernike

Le choix du modèle de l'Eq. (4.112) induit un écart entre les fonctions d'auto-corrélation de l'AR au voisinage de zéro et celles des courbes théoriques. Or, la prédiction de phase se réalisant à très court terme (un pas dont la durée est  $T_s$ ) le choix de ce jeu de paramètres n'est pas anodin. Il fera objet de simulations numériques afin d'éclairer son efficacité en comparaison avec une méthode consistant à ajuster les premiers pas de la courbe de décorrélation.

La Fig. 4.6 compare les courbes de décorrélation théoriques du TT pour un spectre de Kolmogorov et de von-Kármán avec une échelle externe de  $L_0 = 50\text{m}$ , en choisissant les  $\alpha^i$  selon la méthode de [Le Roux *et al.*, 2004]. Il s'avère que ce modèle présente déjà une approximation raisonnable de la courbe de décorrélation aux voisinage de zéro, sans pourtant être la meilleure approximation.

La Fig. 4.7 illustre ce comportement en montrant plus précisément les écarts de décorrélation à très court terme pour le  $Z_2$ ,  $Z_3$  (TT),  $Z_4$  et  $Z_{10}$ . Si d'un côté ces modèles ne sont pas les plus adéquats, hypothèse qu'on sustente ici, de l'autre cet ajustement garantit déjà de bonnes performances, soit en simulations soit en expérimental. La Fig. 4.8 propose une illustration sur l'angle d'arrivée (AA).

Les simulations réalisées au chapitre 6 montrent que le meilleur choix des  $\alpha^i$  consiste à ajuster les courbes d'auto-corrélation au voisinage de zéro.

#### 4.5.3 Modèles auto-régressifs du second ordre

Pour un modèle du second ordre, la phase à l'instant  $(k + 1)$  dépend de deux paramètres,  $\theta$  et  $\zeta$

$$\bar{\phi}_{k+1,i}^{\text{tur}} = \theta_i \bar{\phi}_{k,i}^{\text{tur}} + \zeta_i \bar{\phi}_{k-1,i}^{\text{tur}} + v_{k,i}. \quad (4.113)$$

En utilisant des méthodes d'identification standards (§4.5.1) des modèles du second ordre ont pu être obtenus. L'argumentaire étant que le meilleur modèle est celui qui s'ajuste aux tous premiers pas de la fonction d'auto-corrélation, sur la Fig. 4.9 sont affichées les courbes pour des modèles d'évolution de phase du second ordre. La DSP théorique du TT a été obtenue avec les paramètres :  $D = 42\text{m}$ , *seeing*

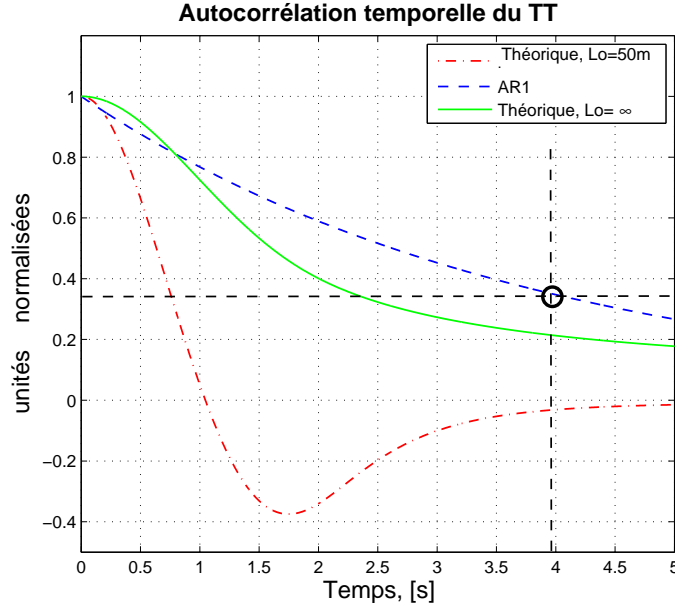


FIG. 4.6 – Fonction d'auto-corrélation théorique et celle obtenue par modélisation AR1 pour le TT. Conditions de simulation : Spectre mono-couche,  $D = 42\text{m}$ , seeing  $1\text{arcsec}$ ,  $r_0 = 0.1\text{ m}$ . Les spectres ont été normalisés par la variance de chaque modèle. Le cercle noir indique la décorrélation à  $1/e$  du maximum.

$= 1.0\text{arcsec}@0.5\mu\text{m}$ ,  $r_0 \approx 0.1\text{m}$ , échelle externe de la turbulence,  $L_0 = 50\text{m}$ , avec trois couches en altitude sur axe de poids relatifs  $\{0.67, 0.22, 0.11\}$ , vitesse moyenne de vent  $V = 12.5\text{m/s}$  dans les directions  $\theta_i = \{0^\circ, 45^\circ, 90^\circ\}$ . Ceci a comme première conséquence un comportement  $\propto f^0$  aux basses fréquences. Le modèle AR1 s'ajuste aux deux premiers pas de décorrélation tandis que le modèle AR2 s'ajuste aux 20 premiers pas, c'est à dire jusqu'à  $10T_s$ , avec  $T_s = 2\text{ms}$ . Il est clair que le modèle AR2 s'ajuste plus étroitement aux courbes de décorrélation théoriques. On peut aussi espérer que les performances obtenues avec de tels modèles soient supérieures à celles avec le modèle AR1.

## 4.6 Réinterprétation sous formalisme d'état d'autres approches de commande

Le formalisme d'état permet de réinterpréter d'autres solutions proposées pour la commande des systèmes d'OA. L'intégrateur communément utilisé, la méthode *POLC* [Gilles, 2005] et la méthode *FrIM-IMC* (basée sur modèle interne) sont présentés. Les résultats s'inspirent de ceux de [Kulcsár et al., 2006] et de [Kulcsár et al., 2009], où les commandes POLC et FrIM sont mises sous la structure générale d'observateur.

Ces deux stratégies de commande en particulier ont plusieurs points en commun. Elles sont basées sur la reconstruction à variance minimale de la phase résiduelle en mettant en place des méthodes itératives pour la résolution des énormes systèmes creux d'équations linéaires auxquelles les OA, modélisés avec une approche zonale, donnent naissance. Elles ont été ensuite adaptées à la boucle fermée en choisissant des régulateurs non optimaux à action intégrale. Afin de rester toujours dans une

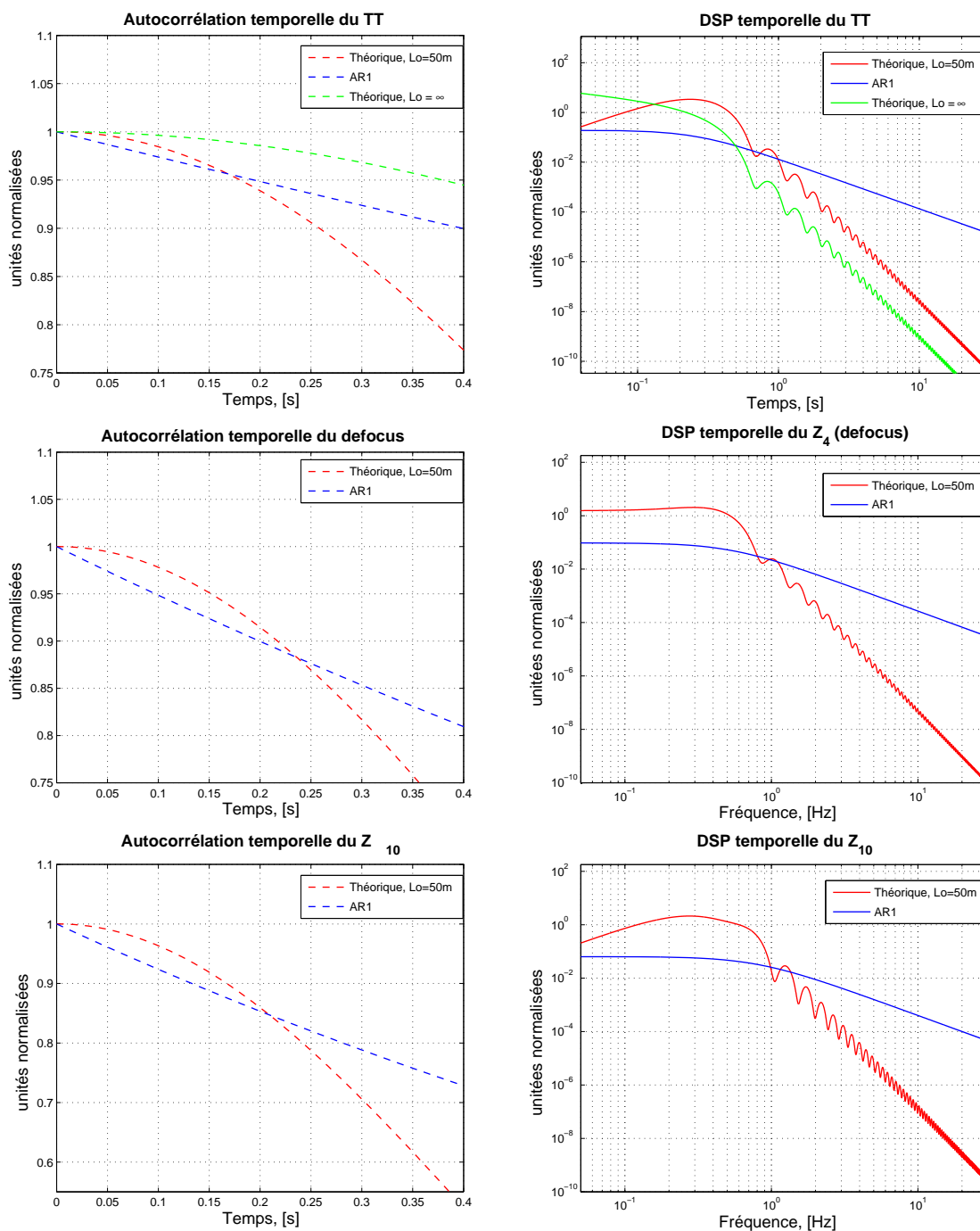


FIG. 4.7 – Fonction d'auto-corrélation théorique et celle obtenue par modélisation AR1. Conditions de simulation : Spectre mono-couche,  $D = 42m$ , seeing 1arcsec,  $r_0 = 0.1$  m. Temps d'intégration  $T_s = 2ms$ .

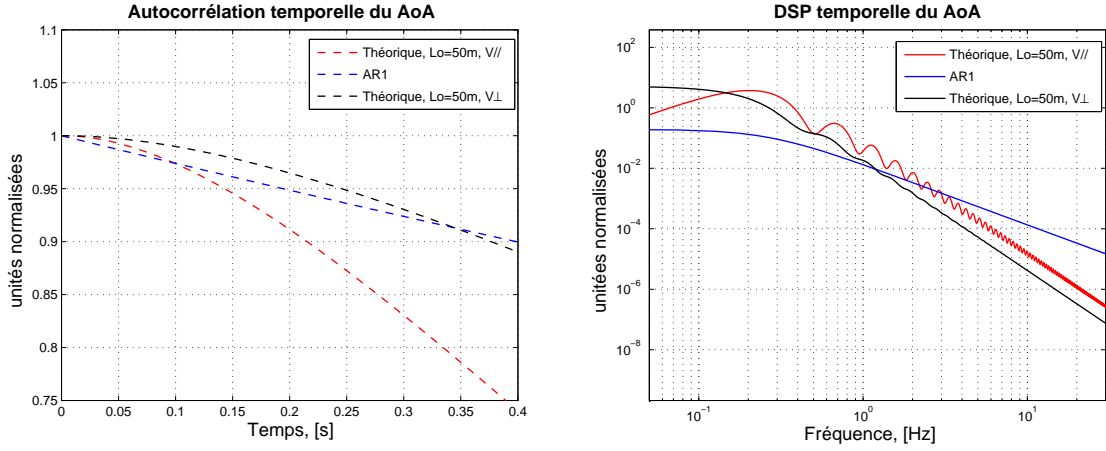


FIG. 4.8 – Fonction d’auto-corrélation théorique et celle obtenue par modélisation AR1 pour l’angle d’arrivée (AoA), parallèle et perpendiculaire à la direction du vent. Conditions de simulation : Spectre mono-couche,  $D = 42\text{m}$ , seeing 1arcsec,  $r_0 = 0.1\text{ m}$ . Un cercle indique la valeur à  $1/e$  du maximum. La fréquence de coupure  $f_c$  est considéré égale à celle du TT  $Z_2, Z_3$ .

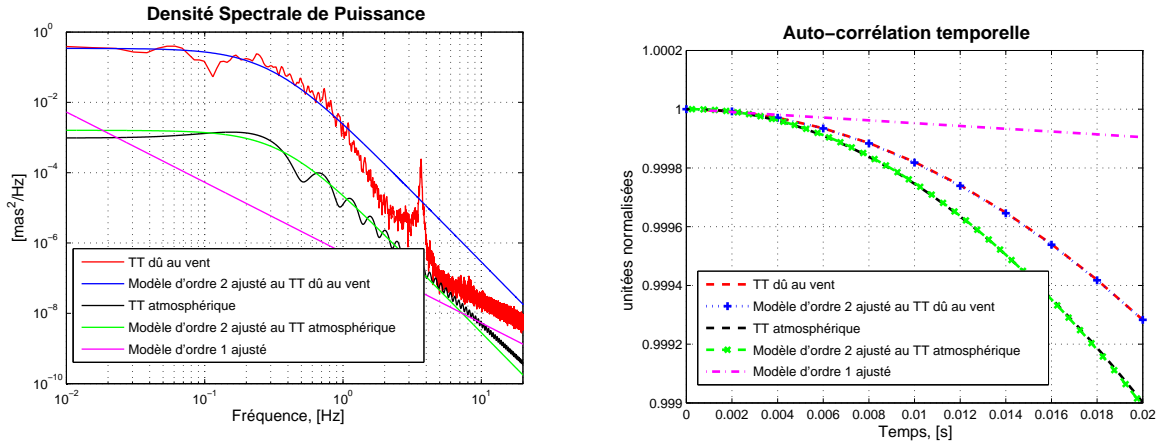


FIG. 4.9 – Gauche : Comparaison des DSP temporelles du TT atmosphérique et du TT induit par le vent dans le système E-ELT M4-M5. DSP atmosphérique obtenue avec les paramètres :  $D = 42\text{m}$ , seeing = 1,0mas@ $0.5\mu\text{m}$ ,  $r_0 \approx 0,1\text{m}$ , échelle externe de la turbulence,  $L_0 = 50\text{m}$ , avec trois couches en altitude sur axe de poids relatifs  $\{0,67; 0,22; 0,11\}$ , vitesse moyenne de vent  $V = 12,5\text{m/s}$  dans les directions  $\theta_i = \{0^\circ, 45^\circ, 90^\circ\}$ .

Droite : Courbes d’auto-corrélation des perturbations et les modèles du premier et second ordre qui s’ajustent au mieux (au sens des moindres carrés) aux premier pas de décorrélation.  $T_s = 2\text{ms}$ .

logique de reconstruction, la phase est estimée à partir des mesures en pseudo boucle ouverte. Celles-ci sont obtenues en soustrayant aux mesures boucle fermée l'effet de la correction par un miroir déformable. Avec ceci, la reconstruction VM peut alors s'appliquer tout aussi aisément qu'auparavant dans le problème de reconstruction de phase statique. Une différence remarquable entre ces deux méthodes est la façon dont les *a priori* spatiaux sont introduits dans le reconstituteur. Le *POLC* utilise l'approximation de la matrice de covariance de la phase  $\Sigma_\phi$  par une matrice creuse proposée par [Ellerbroek, 2002] ou une approximation circulante par blocs à partir du spectre de  $\Lambda_\phi$ ; *FrIM* utilise plutôt une description fractale de la phase [Schwartz *et al.*, 1994], ce qui a été mis au point par [Tallon *et al.*, 2007] en se basant sur les travaux de [Lane *et al.*, 1992] et [Harding *et al.*, 1999], ceux-ci sur la définition et mise en œuvre du *mid-point algorithm*, décrit à la section 2.4.2.1.1.

Au niveau des régulateurs temporels, les deux stratégies conservent une action globale intégrale. Intrinsèquement, le *POLC* et le *FrIM-IMC* présentent un modèle sous-jacent d'évolution temporelle de phase. La stabilité de ces modèles dépend des paramètres internes de chaque régulateur.

#### 4.6.1 Intégrateur

La récurrence de l'intégrateur

$$u_k = u_{k-1} + Gy_k, \quad (4.114)$$

correspond à la fonction de transfert discrète propre<sup>4</sup>

$$\mathbf{u}(z) = G \frac{z}{z-1} \mathbf{y}(z). \quad (4.115)$$

La matrice  $G$  est donnée par  $gM_{com}$ , où  $g$  est le gain de l'intégrateur. Se référer à la section 2.8.2.1 pour plus d'informations concernant les propriétés de ce type de régulateur en OA.

Afin de faire apparaître le modèle d'évolution de phase interne de l'intégrateur et son propre modèle d'état, [Kulcsár *et al.*, 2006] a montré que l'intégrateur sous-entend une dynamique de phase donnée par

$$\bar{\phi}_{k+1}^{tur} = \bar{\phi}_k^{tur} + v_k, \quad (4.116)$$

l'expression d'une marche aléatoire d'énergie non bornée.

Cela conduit au modèle d'état

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_i &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \mathcal{B}_i &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{C}_i &= \begin{pmatrix} D & -DN \end{pmatrix}, & \mathcal{D}_i &= 0 \end{aligned} \quad (4.117)$$

avec

$$x_{k,i} = \begin{pmatrix} \bar{\phi}_k^{tur} \\ u_{k-1} \end{pmatrix}. \quad (4.118)$$

Pour ce cas spécifique, l'équation d'observation devient

$$\hat{\phi}_{k+1|k}^{tur} = \hat{\phi}_{k|k}^{tur} + \mathcal{L}_\infty y_k. \quad (4.119)$$

En multipliant par  $P = (N^T N)^{-1} N^T$ , sachant que  $u_k = P \hat{\phi}_{k+1|k}^{tur}$  il vient

$$P \hat{\phi}_{k+1|k}^{tur} = P \hat{\phi}_{k|k}^{tur} + P \mathcal{L}_\infty y_k, \quad (4.120)$$

<sup>4</sup>Une FT est strictement propre si le degré de son numérateur est strictement inférieur à celui de son dénominateur  $m < n$ . Propre tout court si  $m \leq n$ .



d'où

$$G = \mathcal{PL}_\infty. \quad (4.121)$$

- prédiction de phase au travers l'équation réursive

$$\hat{\phi}_{k+1} = \alpha \hat{\phi}_k + \gamma \hat{\phi}_{k-1} + \delta e_{n-1} \quad (4.125)$$

- projection de l'estimée sur les fonctions d'influence du MD

$$u_k = P \hat{\phi}_{k+1} \quad (4.126)$$

Soit un modèle AR2 pour l'évolution de la phase

$$\bar{\phi}_{k+1}^{\text{tur}} = a_1 \bar{\phi}_k^{\text{tur}} + a_2 \bar{\phi}_{k-1}^{\text{tur}} + v_k. \quad (4.127)$$

Les coefficients s'obtiennent aisément à partir des opérations séquentielles

$$a_1 = \alpha I, \quad (4.128a)$$

$$a_2 = \delta R^{\text{MMSE}} \text{DNP}. \quad (4.128b)$$

Cela conduit au modèle d'état

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_P &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{pmatrix}, \\ \mathcal{C}_P &= \begin{pmatrix} D & 0 & -\text{DN} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}_P = 0 \end{aligned} \quad (4.129)$$

avec

$$x_{k,P} = \begin{pmatrix} \bar{\phi}_k^{\text{tur}} \\ \bar{\phi}_{k-1}^{\text{tur}} \\ u_{k-1} \end{pmatrix}. \quad (4.130)$$

Ce modèle garantit une équation réursive d'état sous forme observateur

$$\hat{x}_{k+1|k} = \mathcal{A}_P \hat{x}_{k|k-1} + \mathcal{L}_P y_k. \quad (4.131)$$

où

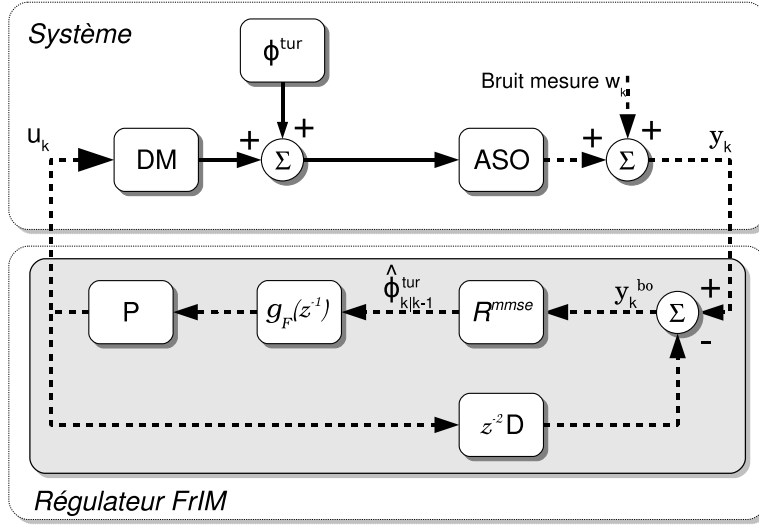
$$\mathcal{L}_P = \begin{pmatrix} \delta R^{\text{MMSE}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.132)$$

Ces deux dernières équations impliquent que l'observateur associé prenne la mesure estimée  $\hat{y}_{k|k-1} = 0$ . Un effet de filtrage pourvu par le paramètre  $\delta$  caractérise cette approche. Cependant, ce filtrage n'est pas optimal.

### 4.6.3 FrIM-IMC

Comme on l'a déjà noté plus haut, la structure de l'approche de [Béchet *et al.*, 2007] est similaire au *POLC*. Cependant, la reconstruction utilise une base modale différente pour décrire la phase et les *a priori*.

L'idée de base étant la même, c'est-à-dire, un problème inverse de reconstruction statique de phase à partir des mesures boucle fermée compensées de la correction apportée par le MD, un autre point de vue est pris pour la régulation en boucle fermée. [Béchet *et al.*, 2007] opte par l'approche IMC [Morari et Zafriou, 1989, Rivera *et al.*, 1985], consistant à estimer la phase turbulente à partir d'un modèle interne du processus physique à réguler. La Fig. 4.11 schématise ce régulateur.

FIG. 4.11 – Structure du régulateur *FrIM+IMC*.

[Béchet, 2008] met aussi en évidence l'action intégrale du régulateur si  $g_F(z) = 1$ , ce qui correspond bien à la structure IMC. Il n'y a alors qu'un seul paramètre à régler, ce qui est simplificateur d'un côté mais aussi plus contraignant de l'autre puisque les degrés de liberté pour adapter ce schéma à la boucle fermée sont réduits, comme l'a d'ailleurs souligné [Kulcsár et al., 2009].

En partant du schéma bloc de la Fig. 4.11, la stratégie de commande *FrIM + IMC* sera réinterprétée dans le formalisme d'état. Le régulateur  $g_F(z^{-1})$  est choisi comme étant l'identité.

Les opérations suivantes sont réalisées :

- obtention des mesures en boucle ouverte

$$y_k^{bo} = y_k + \text{DNP} \hat{\phi}_{k-1|k-2}, \quad (4.133)$$

- prédiction de phase au travers l'équation récursive

$$\hat{\phi}_{k+1|k} = R^{\text{MMSE}} y_k^{bo} \quad (4.134)$$

donnant origine à

$$\hat{\phi}_{k+1|k} = R^{\text{MMSE}} \text{DNP} \hat{\phi}_{k-1|k-2} + R^{\text{MMSE}} y_k, \quad (4.135)$$

- projection de l'estimée sur les fonctions d'influence du MD

$$u_k = P \hat{\phi}_{k+1}. \quad (4.136)$$

Soit un modèle AR2 pour l'évolution de la phase

$$\bar{\phi}_{k+1}^{\text{tur}} = a_1 \bar{\phi}_k^{\text{tur}} + a_2 \bar{\phi}_{k-1}^{\text{tur}} + v_k. \quad (4.137)$$

Les coefficients s'obtiennent aisément

$$a_1 = 0, \quad (4.138a)$$

$$a_2 = R^{\text{MMSE}} \text{DNP}. \quad (4.138b)$$

Cela conduit au modèle d'état

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_F &= \begin{pmatrix} 0 & a_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{C}_F &= \begin{pmatrix} D & 0 & -DN \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}_F = 0, \end{aligned} \quad (4.139)$$

avec

$$x_F = \begin{pmatrix} \bar{\phi}_k^{\text{tur}} \\ \bar{\phi}_{k-1}^{\text{tur}} \\ u_{k-2} \end{pmatrix}. \quad (4.140)$$

Ce modèle garantit une équation réursive d'état

$$\hat{x}_{k+1|k} = \mathcal{A}_F \hat{x}_{k|k-1} + \mathcal{L}_F y_k, \quad (4.141)$$

où

$$\mathcal{L}_F = \begin{pmatrix} R^{\text{MMSE}} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.142)$$

De manière équivalente au *POLC*, l'Eq. (

Comme l'a noté [Kulcsár *et al.*, 2009], la méthode *FrIM-IMC* mène à un modèle de phase implicite qui dépend des hypothèses sur le RSB puisque l'erreur de estimation s'écrit comme

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_{k+1|k}^{\text{tur}} &= \bar{\phi}_{k+1}^{\text{tur}} - \bar{\phi}_{k+1|k}^{\text{tur}} \\ &= a_2 \hat{\phi}_{k-1} + v_k - a_2 \hat{\phi}_{k-1|k-2} - R^{\text{MMSE}} \left( D \bar{\phi}_{k-1} - DNP \tilde{\phi}_{k-1|k-2} + w_k \right) \\ &\approx v_k - R^{\text{MMSE}} w_k, \end{aligned} \quad (4.143)$$

si  $NP = 1$ . Le bruit d'état étant choisi pour garantir le niveau de signal de phase désiré (et avec la bonne covariance), le modèle de phase est ainsi dépendant du RSB, ce qui physiquement n'est pas raisonnable.

En somme, le filtrage du bruit de mesures est absent car le bruit est reconstruit comme s'il s'agissait de la reconstruction statique [voir Eq. (4.142)].

Ce résultat permet d'éclaircir le comportement de *FrIM* en boucle fermée à faible flux conduisant à de moins bonnes performances que des régulateurs à action intégrale couplés de reconstruteur moindres carrés, malgré une reconstruction à variance minimale [Montilla *et al.*, 2009].

## 4.7 Bilan

Ce chapitre pose les bases fondamentales de la théorie de la commande et de l'estimation optimales qui seront utilisées dans les chapitres 5 et 6.

Les étapes requises pour la mise en œuvre de la solution LQG ont été posées, depuis le développement jusqu'à l'évaluation du critère en passant par la définition des matrices de pondération et la construction des modèles dynamiques l'évolution de phase sous-jacents. Sous l'hypothèse d'un MD infiniment rapide, la solution dans la cadre de l'OA a été développée en définissant un modèle d'état plus compacte, particulièrement attractif pour l'implantation temps réel.

Le choix des paramètres des modèles auto régressifs d'évolution de phase ont été analysés et comparés à la proposition formulée ici : ces paramètres doivent être choisis en ajustant les premiers pas des courbes d'auto-corrélation modales [hypothèse prouvée aux chapitre 6]. Le choix consistant

à prendre des paramètres garantissant une décorrélation à  $1/e$  au temps caractéristique  $\tau_c = 1/f_c$  a donc été revu. Les bonnes performances observées de ces modèles dans plusieurs travaux et en expérimental peuvent sans doute être encore améliorés.

Certains régulateurs proposés pour piloter systèmes d'OA dont l'intégrateur classique, le régulateur *POLC* et le *FrIM+IMC* ont été réinterprétés dans le cadre de l'approche d'état. Les modèles d'évolution de phase ont été mis en évidence afin de permettre une compréhension plus élargie du comportement de ces régulateurs en différents régimes d'utilisation, notamment pour des observations à faible flux (donc faible RSB). Pour l'intégrateur, le modèle de phase instable justifie l'effet d'emballement. Le *FrIM+IMC* s'appuie sur un modèle qui ne filtre pas le bruit de mesure ; l'effet est une dégradation de performance critique pour des faibles RSB. En ce qui concerne le *POLC*, malgré la sous-optimalité, le modèle sous-jacent est suffisamment souple pour permettre un filtrage conséquent du bruit de mesure et donc un comportement potentiellement moins dégradé en faible RSB.

Après ce tour d'horizon des commande d'OA optimales et sous-optimales, quelques questions se posent : comment adapter une commande LQG aux systèmes à grand nombre de degrés de liberté, ce qui fait l'objet du chapitre 5, et comment généraliser les résultats de commande optimale présentés ici au cas MD lent, donc ayant une dynamique non négligeable, ce qui fait l'objet du chapitre 6.

## **Chapitre 5**

### **Commande**

### **Linéaire-Quadratique-Gaussienne pour des systèmes d'OA à grand nombre de degrés de liberté**

Où l'algorithme de commande LQG est mis en œuvre et adapté aux systèmes à grand nombre de degrés de liberté.

---

**Sommaire**

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>131</b>
<b>5.2</b>	<b>Mise en œuvre de la commande optimale</b>	<b>132</b>
5.2.1	Calculs hors ligne : équation de Riccati d'estimation et gain de Kalman	133
5.2.2	Calculs temps réel	135
<b>5.3</b>	<b>Commande LQG adaptée aux grands nombres de degrés de liberté</b>	<b>137</b>
5.3.1	Modélisation creuse avec une base zonale	138
<b>5.4</b>	<b>Filtrage de Kalman par résolution d'un système d'équations linéaires <math>Ax = b</math> creux</b>	<b>142</b>
5.4.1	Approximation de la matrice de covariance d'erreur d'estimation	144
<b>5.5</b>	<b>Résolution itérative de systèmes linéaires creux du type <math>Ax = b</math></b>	<b>148</b>
5.5.1	Gradients conjugués	148
5.5.2	Pré-conditionnement	149
<b>5.6</b>	<b>Mise en œuvre de la commande LQG itérative</b>	<b>152</b>
5.6.1	Multiplication par la matrice $A$	153
5.6.2	Multiplication par le pré-conditionneur $C^{-1}$ dans l'espace de Fourier	153
<b>5.7</b>	<b>Analyse algorithmique</b>	<b>154</b>
5.7.1	Structure des calculs	154
5.7.2	Complexité calculatoire	155
<b>5.8</b>	<b>Performances avec approximations : évaluation par simulations Monte Carlo</b>	<b>157</b>
5.8.1	Validation des approches de commande LQG avec une modélisation zonale	157
5.8.2	Le FD-PCG-LQG	160
<b>5.9</b>	<b>Extensions aux OA grand champ</b>	<b>162</b>
5.9.1	Complexité calculatoire	162
5.9.2	Le FD-PCG-LQG en OAMC	164
<b>5.10</b>	<b>Bilan et ouverture</b>	<b>165</b>

---

## 5.1 Introduction

Une première analyse de la problématique des grands nombres de degrés de liberté (GNDL) a été développée au chapitre 3 où la reconstruction et commande de systèmes d'OA classiques se fait dans l'espace des fréquences spatiales. La méthode sous-optimale proposée représente déjà un effort de réduction de la complexité calculatoire en faisant appel aux transformées de Fourier. Dans cet espace, le coût global devient  $O(n \log(n))$  grâce à l'application de la FFT, la transformée de Fourier rapide. La Fig. 3.18 illustre les coûts calculatoires des algorithmes classiques employant des VMM et des transformées de Fourier.

La problématique des GNDL est abordée à nouveau dans ce chapitre, cette fois-ci pour la mise en œuvre de la solution optimale LQG (au sens de la variance minimale de phase résiduelle) définie au chapitre 4. La complexité calculatoire, quel que soit l'algorithme effectuant des multiplications vecteur-matrice, est proportionnelle au carré de la taille de la matrice<sup>1</sup>. Dans le cadre de l'OA cela revient à une complexité fonction de la quatrième puissance de la taille des télescopes, *i.e.*  $D^4$  si la résolution spatiale de mesures/actionneurs est gardée constante. Le LQG n'échappe pas à ce raisonnement. La mise en œuvre de la commande pour des systèmes de grande taille est par conséquent un point qui mérite une attention particulière.

Plusieurs méthodes ont été développées visant la commande de systèmes d'OA à très grand nombre de degrés de liberté. Outre les méthodes FFTr du chapitre 3, le *POLC* pour *pseudo open-loop control* [Gilles, 2005] et le *FrIM + IMC* pour *Fractal Iterative Method + Internal Model Control* [Béchet *et al.*, 2007] suscitent un intérêt particulier car ils sont facilement généralisables aux OA grand champ.

Ces deux stratégies de commande ont plusieurs points en commun. Toutes deux découlent d'un problème d'estimation à variance minimale en boucle ouverte, où la phase est d'abord estimée puis projetée sur l'espace miroir. L'estimation est effectuée en mettant en place des méthodes itératives pour la résolution des énormes systèmes creux d'équations linéaires auxquelles les OA, modélisées avec une approche zonale, donnent naissance. Ensuite, elles ont été adaptées à la boucle fermée en choisissant des régulateurs non optimaux à action intégrale.

Les principes du calcul itératif utilisés par ces méthodes n'est pas facilement transposable à la commande LQG (présentée au chapitre 4). Les matrices dont se sert la commande optimale LQG ne sont pas *a priori* creuses, notamment la matrice de covariance de l'erreur d'estimation  $\Sigma_\infty$  et, par conséquence immédiate, le gain de Kalman.

Malgré cela, ces matrices peuvent être raisonnablement approximées par des matrices creuses en suivant un raisonnement physique sur leur origine et les phénomènes qu'elles représentent. Une méthode qui rentre tout à fait dans cette logique est le *Optimal Fourier Controller*, proposé par [Poyneer *et al.*, 2007]. Il s'agit d'un régulateur optimal en espace Fourier qui relève directement de l'approche Fourier du chapitre 3 où l'indépendance statistique (au sens temporel et spatial) des modes de Fourier est mise à profit pour construire un régulateur LQG modal, optimisé mode-à-mode.

L'objectif principal de ce chapitre de caractère exploratoire consiste donc à proposer une méthode rapide pour la mise en œuvre de la commande optimale LQG, d'abord pour l'OA classique et ensuite des extensions vers des OA grand champ. Les principes de la méthode de reconstruction dans l'espace des fréquences spatiales du chapitre 3 sont retravaillés et adaptés au cadre spécifique de commande optimale LQG.

<sup>1</sup> Si la matrice est carrée. En général le coût est proportionnel au nombre d'éléments total appartenant à la matrice.



Ce chapitre s'organise de la manière suivante : la mise en œuvre de la commande LQG est d'abord simplifiée à la section 5.2 avant de l'adapter à l'usage de méthodes itératives à la section 5.3. L'utilisation des gradients conjugués est proposée à la section 5.4. Un pré-conditionnement dans l'espace des fréquences spatiales, visant à augmenter le taux de convergence des méthodes itératives, est suggéré à la section 5.5. La structure du problème étant particulièrement adaptée à l'utilisation d'une diagonalisation dans l'espace Fourier, un pré-conditionneur inspiré des travaux de [Yang et al., 2006] est modifié pour rendre compte des spécificités de l'approche LQG. La conception d'un pré-conditionnement dans l'espace de Fourier complète ainsi le lien structurel avec le chapitre 3. La version complète de l'algorithme conçu dans ce chapitre est dénommée FD-PCG-LQG pour *Fourier-Domain Preconditioned Conjugate Gradients Linear Quadratic Gaussian control*. Celle-ci est présentée à la section 5.6 et la complexité calculatoire explorée à la section 5.7. Puis, le FD-PCG-LQG est évalué et comparé aux mises en œuvre classiques par des simulations de Monte-Carlo à la section 5.8 afin de valider les propositions particulières formulées le long du chapitre.

## 5.2 Mise en œuvre de la commande optimale

La mise en œuvre de la commande LQG inclut deux parties distinctes : calculs hors ligne et calculs temps-réel. Ils sont précisés séparément.

Soit le système de l'Eq. (4.80)

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \bar{\phi}_{k+2}^{\text{tur}} \\ \bar{\phi}_{k+1}^{\text{tur}} \\ u_k \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{cc|c} \mathcal{A}_{\text{tur}} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \bar{\phi}_{k+1}^{\text{tur}} \\ \bar{\phi}_k^{\text{tur}} \\ u_{k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_k + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} v_k \\ z_k = D \left( \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -N \end{array} \right) x_k + w_k \end{cases}, \quad (5.1)$$

où l'état  $x_k$  est défini par

$$x_k \triangleq \begin{pmatrix} \bar{\phi}_{k+1}^{\text{tur}} \\ \bar{\phi}_k^{\text{tur}} \\ u_{k-1} \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Afin de décrire les calculs strictement nécessaires à effectuer par la commande optimale LQG, une partition entre les états stochastiques et déterministes est réalisée. Soit  $x_k^{\text{tur}} \triangleq \begin{pmatrix} \bar{\phi}_{k+1}^{\text{tur}} \\ \bar{\phi}_k^{\text{tur}} \end{pmatrix}$  le sous état de  $x_k$  qui regroupe les composantes de phase. Avec cette définition, l'Eq. (5.1) s'écrit

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_{k+1}^{\text{tur}} \\ u_k \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} \mathcal{A}_d^{\text{tur}} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_k^{\text{tur}} \\ u_{k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_k + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} v_k \\ z_k = \left( \begin{array}{c|c} \mathcal{C}_d^{\text{tur}} & -DN \end{array} \right) x_k + w_k \end{cases}, \quad (5.3)$$

où

$$\mathcal{A}_d^{\text{tur}} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{\text{tur}} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{B}_d^{\text{tur}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{C}_d^{\text{tur}} = \begin{pmatrix} 0 & D \end{pmatrix} \quad \Gamma_d^{\text{tur}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Il est clair que la partie déterministe de l'état n'est pas estimée : ce sont des valeurs retardées de la commande  $u_k$ . Seule la partie stochastique  $x_k^{\text{tur}}$  nécessite d'être estimée par filtrage de Kalman, décrit et adapté à l'OA à la section 4.4.

### 5.2.1 Calculs hors ligne : équation de Riccati d'estimation et gain de Kalman

Les calculs hors ligne du gain de Kalman correspondent aux équations de Riccati données dans le cas général par les Eqs. (4.41) et (4.42), ce qui conduit pour le modèle turbulent à

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\infty &\triangleq \mathcal{A}_d^{\text{tur}} \mathcal{H}_\infty \\ &= \mathcal{A}_d^{\text{tur}} \Sigma_\infty (\mathcal{C}_d^{\text{tur}})^\top \left( \mathcal{C}_d^{\text{tur}} \Sigma_\infty (\mathcal{C}_d^{\text{tur}})^\top + \Sigma_w \right)^{-1},\end{aligned}$$

avec  $\Sigma_\infty$  la solution de l'équation algébrique de Riccati

$$\Sigma_\infty \triangleq \mathcal{A}_d^{\text{tur}} \Sigma_\infty (\mathcal{A}_d^{\text{tur}})^\top + \Sigma_v - \mathcal{A}_d^{\text{tur}} \Sigma_\infty (\mathcal{C}_d^{\text{tur}})^\top \left( \mathcal{C}_d^{\text{tur}} \Sigma_\infty (\mathcal{C}_d^{\text{tur}})^\top + \Sigma_w \right)^{-1} \mathcal{C}_d^{\text{tur}} \Sigma_\infty (\mathcal{A}_d^{\text{tur}})^\top.$$

Ces calculs sont décomposés selon les travaux de [Petit, 2006] consistant à obtenir la matrice de covariance d'erreur d'estimation  $\Sigma_\infty$  par résolution de l'équation de Riccati (4.42) sur une seule composante de phase de l'état  $x_k^{\text{tur}}$ , de façon à ce que les systèmes d'équations associés soient de taille moindre. A cet égard, Petit montre que

$$\begin{aligned}\Sigma_\infty &= \begin{pmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2^\top \\ \Sigma_2 & \Sigma_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{\text{tur}} \Sigma_3 \mathcal{A}_{\text{tur}}^\top + \Sigma_v & \mathcal{A}_{\text{tur}} \Sigma_3^\top \\ \Sigma_3 \mathcal{A}_{\text{tur}}^\top & \mathcal{A}_{\text{tur}} \Sigma_3 \mathcal{A}_{\text{tur}}^\top + \Sigma_v - \mathcal{A}_{\text{tur}}^\top \Sigma_3 \mathcal{D}^\top (\mathcal{D} \Sigma_3 \mathcal{D}^\top + \Sigma_w)^{-1} \mathcal{D} \Sigma_3 \mathcal{A}_{\text{tur}} \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (5.5)$$

Le bloc inférieur à droite de la matrice de l'Eq. (5.5) définit une équation de Riccati associée à un sous-état dont une seule occurrence de phase intervient. Ce sous-bloc s'écrit

$$\Sigma_3 = \mathcal{A}_{\text{tur}} \Sigma_3 \mathcal{A}_{\text{tur}}^\top + \Sigma_v - \mathcal{A}_{\text{tur}}^\top \Sigma_3 \mathcal{D}^\top \left( \mathcal{D} \Sigma_3 \mathcal{D}^\top + \Sigma_w \right)^{-1} \mathcal{D} \Sigma_3 \mathcal{A}_{\text{tur}}. \quad (5.6)$$

Dans la pratique, c'est celle-ci qui est calculée,  $\Sigma_\infty$  pouvant être totalement obtenue à partir de  $\Sigma_3$  en appliquant l'Eq. (5.5) ; toutes les autres matrices intervenant lors de ce calcul sont connues auparavant. La matrice de covariance  $\Sigma_3$  peut être obtenue par des méthodes algébriques ou itératives. Trois exemples sont détaillés dans ce qui suit pour une application au contexte de l'OA.

#### 5.2.1.1 Détermination de la solution de la Riccati d'estimation

Deux types de méthodes sont présentés. Une solution non-itérative consistant à calculer explicitement  $\Sigma_\infty$  et deux méthodes itératives : la classique (itération de point fixe) et l'algorithme de doublage.

**5.2.1.1.1 Solution non itérative** [Söderström, 2002] : la solution de l'équation algébrique de Riccati est obtenue en construisant un système de  $2n$  équations linéaires, de taille double de celle de  $\Sigma_\infty$ .

Soit la matrice d'Euler

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{\text{tur}}^{-\top} & \mathcal{A}_{\text{tur}}^{-\top} \mathcal{D}^\top \Sigma_w^{-1} \mathcal{D} \\ \Sigma_v \mathcal{A}_{\text{tur}}^{-\top} & \mathcal{A}_{\text{tur}} + \Sigma_v \mathcal{A}_{\text{tur}}^{-\top} \mathcal{D}^\top \Sigma_w^{-1} \mathcal{D} \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

En réalisant la factorisation en valeurs propres de  $\mathcal{E}$ , il vient

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} T_{1,1} & T_{1,2} \\ T_{2,1} & T_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{\mathcal{E}} & 0 \\ 0 & \Gamma_{\mathcal{E}}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{1,1} & T_{1,2} \\ T_{2,1} & T_{2,2} \end{pmatrix}^{-1}, \quad (5.8)$$

où les valeurs propres se présentent par construction aux couples  $(-\lambda_i, \lambda_i)$ .

La solution finale s'obtient de

$$\Sigma_3 = T_{2,1} T_{1,1}^{-1}. \quad (5.9)$$

En pratique, considérant que l'inversion est de complexité  $O(n^3)$ , passer de  $n$  à  $n/2$  conduit à une réduction de complexité d'environ un ordre de grandeur.

**5.2.1.1.2 Itération de point fixe** L'itération de point-fixe est la de forme naturelle de mise à jour de la matrice de covariance d'erreur d'estimation.

L'équation de Riccati de l'Eq. (5.6) sous forme non asymptotique s'écrit

$$\Sigma_{3,k+1} = \mathcal{A}_{\text{tur}} \Sigma_{3,k} \mathcal{A}_{\text{tur}}^T + \Sigma_v - \mathcal{A}_{\text{tur}}^T \Sigma_{3,k} D^T \left( D \Sigma_{3,k} D^T + \Sigma_w \right)^{-1} D \Sigma_{3,k} \mathcal{A}_{\text{tur}}, \quad (5.10)$$

où la dépendance conditionnelle a été négligée. Cette équation est itérée jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt soit franchi : par exemple convergence de la trace avec un seuil à définir.

**5.2.1.1.3 Algorithme itératif de doublage** [Anderson et Moore, 1995b] : l'algorithme de doublage consiste à itérer un système d'équations différent de celui défini par l'itération de point-fixe naturelle de l'Eq. (4.34), en faisant

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k (I + \beta_k \gamma_k)^{-1} \alpha_k \quad (5.11a)$$

$$\beta_{k+1} = \alpha_k (I + \beta_k \gamma_k)^{-1} \beta_k \alpha_k \quad (5.11b)$$

$$\gamma_{k+1} = \gamma_k + \alpha_k^T \gamma_k (I + \beta_k \gamma_k)^{-1} \alpha_k \quad (5.11c)$$

avec valeurs initiales

$$\alpha_{-1} = \mathcal{A}_{\text{tur}}^T, \quad \beta_{-1} = D^T \Sigma_w^{-1} D, \quad \gamma_{-1} = \Sigma_v. \quad (5.12)$$

La solution finale est obtenue par

$$\Sigma_3 = \lim_{k \rightarrow +\infty} \gamma_{k+1}. \quad (5.13)$$

La solution à l'itération  $k$  de ce système est équivalente à la solution à l'itération  $2^k$  de l'itération de point-fixe, d'où le nom de l'algorithme. C'est l'algorithme de doublage qui a été utilisé dans l'ensemble des simulations présentées dans ce mémoire, sauf mention contraire.

### Exemple : Convergence des méthodes itératives

La Fig. 5.1 compare le taux de convergence des méthodes itératives vis-à-vis de la solution non-itérative. Un système d'OA classique avec  $20 \times 20$  sous-pupilles et 400 modes turbulents estimés est considéré.

Cet exemple montre que la vitesse de convergence est telle que la solution de l'équation de Riccati ne requiert pas plus d'environ 10 itérations de l'algorithme de doublage. Cela représente une accélération des calculs de l'ordre de deux ordres de grandeur, car le nombre d'itérations requises par l'itération de point fixe par rapport au nombre d'itérations de l'algorithme de doublage s'écrit  $2^{10}/10 \approx 10^2$ . Ceci reste vrai car les matrices des deux algorithmes sont de la même taille. ◀

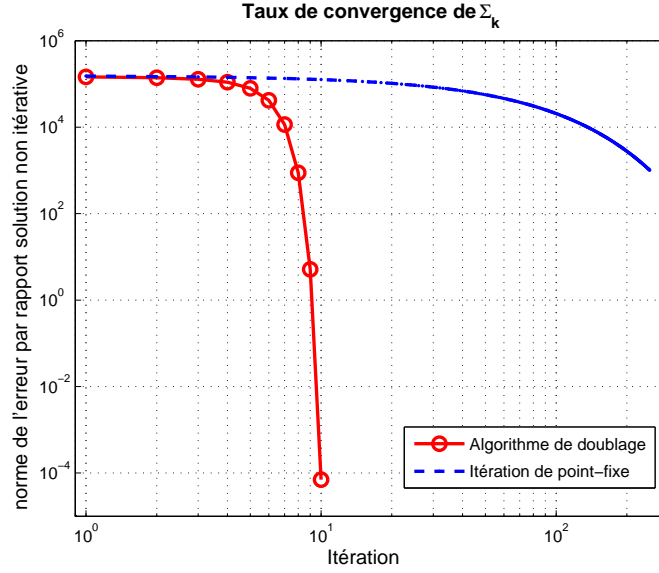


FIG. 5.1 – Taux de convergence de l'algorithme de doublage par rapport à un algorithme consistant à itérer l'Eq. (5.6). La norme de l'erreur est donnée par  $E \left\{ \|\Sigma_k - \Sigma_\infty\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}$ . Les conditions de simulation sont données plus loin au tableau 5.3.

### 5.2.2 Calculs temps réel

Pour la mise en œuvre en temps réel du régulateur LQG, trois opérations élémentaires, définies à la section 4.3.2.1, sont réalisées. La simplification structurelle obtenue grâce à l'utilisation d'observations  $z_k = y_{k-1}$  en avance d'un cran par rapport aux vraies mesures [§4.4.4] donne lieu à des changements dans l'indexation des équations de prédiction et de mise à jour du filtre de Kalman.

En notant que la composante de l'état liée à la commande n'est pas estimée, ceci permet de simplifier les étapes de mise à jour et prédiction. En utilisant uniquement l'état  $x^{\text{tur}}$ , à l'itération  $k$ , les opérations temps réel suivantes sont réalisées :

$  \begin{aligned}  1) \quad \hat{y}_k _{\mathcal{Y}_{k-1}} &= D \begin{pmatrix} 0 & I \end{pmatrix} \hat{x}_{k-1}^{\text{tur}} _{\mathcal{Y}_{k-1}} - DN u_{k-2}, \\  2) \quad \hat{x}_k^{\text{tur}} _{\mathcal{Y}_k} &= \mathcal{A}_d^{\text{tur}} \hat{x}_{k-1}^{\text{tur}} _{\mathcal{Y}_{k-1}} + \mathcal{L}_\infty (y_k - \hat{y}_k _{\mathcal{Y}_{k-1}}), \\  3) \quad u_k &= P \begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix} \hat{x}_k^{\text{tur}} _{\mathcal{Y}_k} = P \hat{\phi}_{k+1}^{\text{tur}} _{\mathcal{Y}_k}.  \end{aligned}  $	Opérations temps-réel
--	-----------------------

(5.14)

La Fig. 5.2 schématise les opérations de l'Eq. (5.14) quand une mesure  $y_k$  arrive en entrée du régulateur optimal.

#### Démonstration : Opérations réalisées en temps réel.

Tout d'abord, on écrit les équations du filtre sous la forme estimateur pour les observations  $z_k$ . Avec un certain abus de notation on utilise ici  $\mathcal{H}_\infty \leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathcal{H}_\infty \\ 0 \end{pmatrix}$  pour s'accorder aux dimensions de



l'état.

$$\begin{aligned}
 \hat{z}_k|_{\mathcal{Z}_{k-1}} &= D \begin{pmatrix} 0 & I & -N \end{pmatrix} \hat{x}_k|_{\mathcal{Z}_{k-1}}, \\
 \hat{x}_k|_{\mathcal{Z}_k} &= \hat{x}_k|_{\mathcal{Z}_{k-1}} + \mathcal{H}_\infty (z_k - \hat{z}_k|_{\mathcal{Z}_{k-1}}), \\
 \hat{x}_{k+1}|_{\mathcal{Z}_k} &= \mathcal{A}_d \hat{x}_k|_{\mathcal{Z}_k} + \mathcal{B}_d u_k, \\
 u_k &= P \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{x}_k|_{\mathcal{Z}_{k-1}} = P \hat{\phi}_{k+1|k}^{\text{tur}}.
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Cette forme n'est pas implémentable en temps réel car à l'instant  $k$  les observations  $z_k$  ne sont pas disponibles (seules les observations  $z_{k-1}$  le sont). Le retard de mesure ayant été reporté au niveau de la commande, on retarde d'un cran les lignes 1, 2 et 3 de l'Eq. (5.15) comme cela a été expliqué à la section 4.4.4, pour obtenir

$$\hat{z}_{k-1}|_{\mathcal{Z}_{k-2}} = D \begin{pmatrix} 0 & I & -N \end{pmatrix} \hat{x}_{k-1}|_{\mathcal{Z}_{k-2}}, \tag{5.16a}$$

$$\hat{x}_{k-1}|_{\mathcal{Z}_{k-1}} = \hat{x}_{k-1}|_{\mathcal{Z}_{k-2}} + \mathcal{H}_\infty (z_{k-1} - \hat{z}_{k-1}|_{\mathcal{Z}_{k-2}}) \tag{5.16b}$$

$$\hat{x}_k|_{\mathcal{Z}_{k-1}} = \mathcal{A}_d \hat{x}_{k-1}|_{\mathcal{Z}_{k-1}} + \mathcal{B}_d u_{k-1}, \tag{5.16c}$$

$$u_k = P \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{x}_k|_{\mathcal{Z}_{k-1}} = P \hat{\phi}_{k+1|k}^{\text{tur}}. \tag{5.16d}$$

Comme  $\mathcal{Y}_k = \mathcal{Z}_{k-1}$ , on obtient l'identité  $\hat{z}_{k-1}|_{\mathcal{Z}_{k-2}} = \hat{y}_k|_{\mathcal{Y}_{k-1}}$  ; donc, la première ligne s'écrit

$$\begin{aligned}
 \hat{y}_k|_{\mathcal{Y}_{k-1}} &= D \begin{pmatrix} 0 & I & -N \end{pmatrix} \hat{x}_{k-1}|_{\mathcal{Y}_{k-1}} \\
 &= D \begin{pmatrix} 0 & I \end{pmatrix} \hat{x}_{k-1|k}^{\text{tur}} - DN u_{k-2},
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

alors que, en particulierisant pour la partie stochastique de l'état, les deuxième et troisième regroupées s'écrivent

$$\hat{x}_k^{\text{tur}}|_{\mathcal{Y}_k} = \mathcal{A}_d^{\text{tur}} \hat{x}_{k-1}^{\text{tur}}|_{\mathcal{Y}_{k-1}} + \mathcal{L}_\infty (y_k - \hat{y}_k|_{\mathcal{Y}_{k-1}}). \tag{5.18}$$

La dernière ligne concernant la commande  $u_k$  se met finalement sous la forme

$$u_k = P \begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix} \hat{x}_k^{\text{tur}}|_{\mathcal{Y}_k} = P \hat{\phi}_{k+1|k}^{\text{tur}}. \tag{5.19}$$

■

### 5.2.2.1 Récapitulatif des méthodes de calcul existantes

À ce stade, on a identifié et mis en place des méthodes de calcul itératives rapides pour les opérations réalisées hors ligne. Une réduction considérable de la complexité est obtenue en passant par un modèle d'état de taille réduite.

Cependant, la simplification de la commande LQG par la réduction du nombre de composantes de l'état n'est en soi pas suffisante pour réduire le coût calculatoire ni hors ligne ni temps réel. Avec une implantation mettant en place des multiplications vecteur-matrice, alors on retombe sur une loi de type  $O(n^2)$ . Des solutions permettant de réduire cette complexité sont proposées par la suite.

## 5.3 Commande LQG adaptée aux grands nombres de degrés de liberté

Cette section est consacrée à l'étude et à l'adaptation de la commande LQG aux systèmes d'OA à grand nombre de degrés de liberté (GNDL).

Malgré l'existence de méthodes rapides pour le calcul hors-ligne de l'équation de Riccati algébrique (ARE) [Eq. (4.42)] et donc du gain de Kalman [Eq. (4.41)], la mise en œuvre temps réel

de l'Eq. (5.14) d'une commande du type LQG peut se révéler très coûteuse, voir même intolérable vis-à-vis du calculateur numérique.

Afin de réduire les calculs associés à l'Eq. (5.14), la base de modélisation a encore une fois été remise en cause [cf. section 3.3]. Un raisonnement analogue à celui qui est à la base de l'approche Fourier présentée au chapitre 3 est suivi dans ce qui suit.

A la section 5.3.1 les opérations élémentaires de la commande LQG sont donc modélisées avec une approche zonale dans le but d'obtenir une représentation creuse. Avec ceci, l'application de la commande pourra être accomplie par une résolution itérative de systèmes d'équations linéaires. L'obtention de cette représentation, détaillée à la section 5.4, est motivée par plusieurs travaux récents en OA, plus précisément [Piatrou et Roggemann, 2007] en ce qui concerne la modélisation zonale et ceux de [Gilles *et al.*, 2002, Gilles *et al.*, 2003b, Yang *et al.*, 2006], pour ce qui concerne l'utilisation de méthodes itératives avec pré-conditionnement. Se reporter à la section 4.4 pour une discussion plus élargie sur ces travaux.

### 5.3.1 Modélisation creuse avec une base zonale

Si une description zonale de la phase est adoptée, ceci veut dire, en d'autres termes, que la base de sinus cardinaux est implicitement employée, alors les opérations élémentaires déclinées à l'Eq. (5.14) sont potentiellement moins coûteuses du point de vue calculatoire. En association avec la base de Fourier, espace dans lequel les opérateurs se diagonalisent (sous certaines hypothèses, cf. section 3.5), alors le nombre de calculs décroît avec l'utilisation d'algorithmes rapides de calcul de la transformée de Fourier. Les arguments mis en avant au chapitre 3 restent donc valables ; ils seront adaptés à la commande LQG en suivant une procédure similaire.

La modélisation zonale de chaque opération prenant place à l'Eq. (5.14) est précisée ci-dessous, sous l'hypothèse d'invariance par translation des opérations de mesure et de déformation du miroir (autrement dit, les fonctions d'influence sont les mêmes indépendamment de la position dans l'espace).

L'équation de mise à jour dans l'Eq. (5.14), deuxième ligne, peut en fait s'écrire en deux étapes ; mise à jour de  $\hat{x}_{k-1|\mathcal{Y}_{k-1}}^{\text{tur}}$  pour obtenir  $\hat{x}_{k-1|\mathcal{Y}_k}^{\text{tur}}$  et prédiction en multipliant  $\hat{x}_{k-1|\mathcal{Y}_k}^{\text{tur}}$  par  $\mathcal{A}_d^{\text{tur}}$  pour obtenir  $\hat{x}_{k|\mathcal{Y}_k}^{\text{tur}}$ . Ceci a pour avantage de séparer le calcul en une étape faisant intervenir une multiplication par une matrice pleine (paragraphe 5.3.1.2) et une étape de multiplication par une matrice déjà creuse (paragraphe 5.3.1.3).

#### 5.3.1.1 Mesure estimée

$$\hat{y}_{k|\mathcal{Y}_{k-1}} = D \begin{pmatrix} 0 & I \end{pmatrix} \hat{x}_{k-1|\mathcal{Y}_{k-1}}^{\text{tur}} - DN u_{k-2}$$

En employant une approche zonale pour décrire la surface d'onde, D devient un opérateur creux puisque les gradients discrets de la phase sont obtenus à partir d'un noyau localisé. Pour l'analyseur Hartmann-Shack, ce noyau utilise quatre points de phase aux bords de chaque sous-pupille – la géométrie de Fried [Fried, 1977]. D'autres géométries peuvent être envisagées pour la représentation discrète de l'ASO HS, cf. section 3.3.1.1. La structure de la matrice D ainsi générée est montrée sur la Fig. 5.3 à gauche.

La matrice N est aussi creuse puisque, encore une fois, les fonctions d'influence des actionneurs sont localisées, surtout si elles sont bien modélisées par des fonctions splines bi-cubiques ou des

Gaussiennes seuillées [cf. section 2.5.1.2]. Le motif de remplissage de N est présenté sur la Fig. 5.3 à droite.

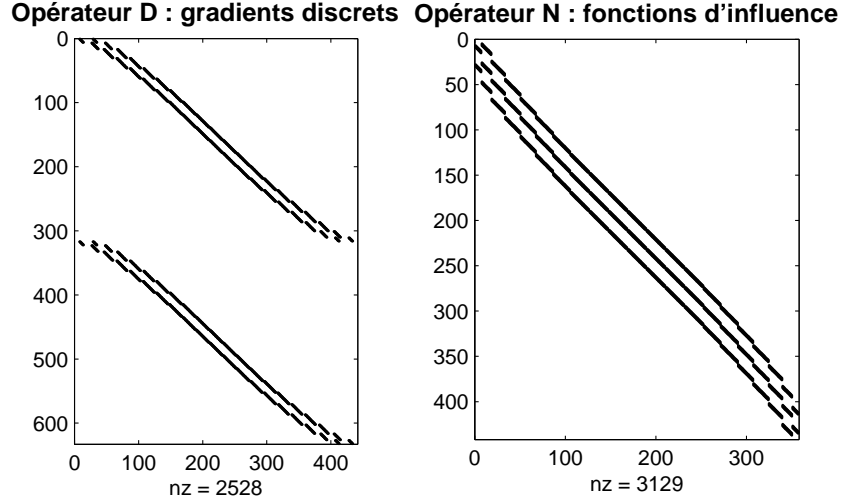


FIG. 5.3 – Matrices D et N, avec modèle de mesure de Fried [Eq. (3.26)]. Représentation zonale pour un système avec  $20 \times 20$  sous-pupilles, dont 316 valides dans la pupille principale. Les 357 actionneurs valides sont placés aux coins des sous-pupilles, selon la géométrie de Fried. Taux de remplissage de 0,91% et 1,99% respectivement.

Les motifs générés sont creux avec des taux de remplissage d'autant plus faibles que les systèmes sont grands. Ceci vient de la constance du nombre d'éléments non nuls par sous-pupille ou bien par actionneur. Autrement dit, les noyaux convolutifs de D et N ne varient pas en fonction de la taille du système. Les dimensions des matrices étant proportionnelles au carré du nombre de degrés de liberté, soit  $n^2$ , le remplissage est plutôt proportionnel à  $n$  si une modélisation avec une base creuse est adoptée.

### 5.3.1.2 Mise à jour

$$\hat{x}_{k-1|y_k}^{\text{tur}} = \hat{x}_{k-1|y_{k-1}}^{\text{tur}} + \mathcal{H}_\infty (y_k - \hat{y}_{k|y_{k-1}})$$

L'étape de mise à jour est la plus coûteuse à différents points de vue. D'une part il s'agit de la multiplication d'un vecteur par une matrice de gain de Kalman résultant de l'application de l'Eq. (5.14). D'autre part il n'est pas évident d'intuiter une matrice creuse suffisamment proche du gain théorique puisque  $\mathcal{H}_\infty$  est obtenue à partir d'une matrice inverse, donnant généralement origine à une matrice pleine. Pour l'OA, cette matrice inverse est sûrement pleine, puisque l'inverse de la



matrice ASO est intrinsèquement pleine<sup>2</sup>.

L'idée qui est exploitée en l'occurrence consiste à éviter l'inversion de  $(C_d^{\text{tur}} \Sigma_\infty (C_d^{\text{tur}})^\top + \Sigma_w)^{-1}$  en utilisant des méthodes itératives pour obtenir le résultat de la multiplication d'un vecteur par cette matrice, sans que pourtant elle ne soit jamais inversée. A cet égard, les méthodes *POLC* et *FrIM-IMC* emploient des idées similaires.

Pour cela, la multiplication matricielle ayant lieu à l'étape de mise à jour est transformée à la section 5.4 en un système d'équations linéaires quasi indépendantes, donc très creux.

### 5.3.1.3 Prédiction

$$\hat{x}_k^{\text{tur}} | \mathcal{Y}_k = \mathcal{A}_d^{\text{tur}} \hat{x}_{k-1}^{\text{tur}} | \mathcal{Y}_k$$

En partant de la définition de  $\mathcal{A}_d^{\text{tur}}$  à l'Eq. (5.3), elle est creuse si  $\mathcal{A}^{\text{tur}}$  est aussi une matrice creuse. La solution naturelle pour  $\mathcal{A}^{\text{tur}}$  consiste à minimiser l'erreur quadratique de prédiction en prenant

$$\mathcal{A}^{\text{tur},*} = \arg \min_{\mathcal{A}} E \{ \|\phi_{k+1} - \mathcal{A} \phi_k\|^2 \}, \quad (5.20)$$

dont la solution est donnée par

$$\mathcal{A}^{\text{tur},*} = E \{ \phi_{k+1} \phi_k^\top \} E \{ \phi_k \phi_k^\top \}^{-1}, \quad (5.21)$$

avec  $\Sigma_\phi^\Delta \triangleq E \{ \phi_{k+1} \phi_k^\top \}$  la corrélation de la phase à un pas et  $\Sigma_\phi \triangleq E \{ \phi_k \phi_k^\top \}$ . La fonction de corrélation de la phase en fonction de la distance  $r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$  est donnée à l'Eq. (2.20).

Malgré le fait que les matrices de covariance  $\Sigma_\phi^\Delta$  et  $\Sigma_\phi$  soient toutes deux pleines [Fig. 5.4-gauche] le résultat de l'Eq. (5.21) présente une structure diagonale très marquée avec une concentration de valeurs autour de la diagonale principale et des valeurs faibles ailleurs. Ce résultat est montré sur la Fig. 5.4-droite, pour un point de phase quelconque dans l'espace. Les coupes horizontale et verticale de la matrice  $\Sigma_\phi^\Delta$  sont représentées. Les corrélations perpendiculaires à la direction de la vitesse du vent ont une étendue très restreinte, alors que pour les corrélations le long de la direction du vent elles sont plus élargies. Cet aspect est à l'origine de la méthode de simulation d'écrans turbulents non stationnaires infiniment longs proposée par [Assémat *et al.*, 2006] puis réinterprétée et généralisée par [Beghi *et al.*, 2008d] dans le cadre de la théorie des processus stochastique.

**Détermination des coefficients de  $\mathcal{A}^{\text{tur}}$**  L'objectif maintenant est de trouver des coefficients de la matrice  $\mathcal{A}_{\text{tur}}$  qui soient physiquement justifiables et numériquement attractifs, c'est-à-dire que la matrice  $\mathcal{A}_{\text{tur}}$  soit aussi creuse que possible tout en garantissant un modèle d'évolution de phase raisonnable. Le caractère raisonnable est fruit de discussions diverses à ce jour, notamment en ce qui concerne la prédiction de phase sous l'hypothèse de Taylor [section 2.3.2.3]. Les travaux de [Beghi *et al.*, 2008b, Beghi *et al.*, 2008c, Beghi *et al.*, 2008a] se penchent sur ce problème, mais il reste à prouver l'amélioration globale des performances de la commande par rapport au choix de modèles AR d'ordre réduit, qui eux ne sont pas appropriés pour la prédiction de phase en translation.

<sup>2</sup>Ce ne veut pas dire pourtant que telle indépendance permette de résoudre le système par sous-blocs, ce qui pourrait suggérer que l'inverse serait potentiellement creuse. Or, en OA la dérivation spatiale de la phase réalisée par l'ASO rend impossible une matrice inverse creuse, car cette inverse configure une intégration spatiale, qui crée des interdépendances linéaires enchaînées. Il n'y a donc pas d'ensembles indépendants [Saad, 1996].

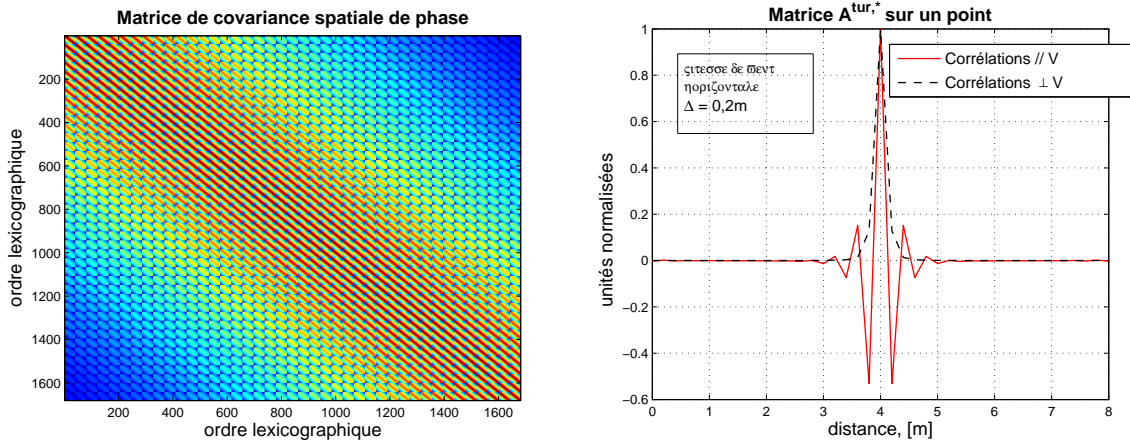


FIG. 5.4 – Gauche : Matrice de covariance de phase  $\Sigma_\phi$  ; la structure horizontale est bien visible, attestant l'équivalence des points de discrétisation de la perturbation de phase puisque il s'agit d'un phénomène isotrope et homogène.

Droite : matrice  $\mathcal{A}^{tur,*}$  pour  $\Delta r = 0.2m$ . Les coupes parallèle et perpendiculaire au vecteur vitesse du vent sont montrées, pour un point central situé à 4m du bord.

Une exception est le cas de la base de Fourier, utilisée dans les travaux de [Poyneer *et al.*, 2007], où chaque mode est caractérisé par un pic fréquentiel (par construction) et donc les décalages spatiaux sont approximatés par des modèles AR à coefficient complexe garantissant la stabilité du modèle d'évolution. Ce n'est pas le cas pour d'autres représentations à contenu fréquentiel élargi car les décalages spatiaux ne sont pas simples à déterminer. Par exemple pour les polynômes de Zernike, les décalages sont obtenus comme une combinaison linéaire de la base [Lundström et Unsbo, 2007]. Un défilement avec cette base aurait donc requis une matrice  $\mathcal{A}^{tur}$  à structure dense, donc pas très envisageable pour l'application visée.

[Poyneer *et al.*, 2009] ont étudié le problème d'optimisation de la loi de commande de systèmes d'OA sous hypothèse que l'atmosphère est en effet composée de couches turbulentes en translation. Leurs résultats expérimentaux, obtenus aux observatoires Keck et Gemini à Hawaii, montrent qu'en moyenne 30% de l'énergie totale est une translation et ce plus de 90% du temps. L'énergie restante est sûrement une sorte de bouillonnement dont le comportement est moins simple à modéliser par des translations. Or, ceci indique que la performance globale de la commande peut être en effet améliorée, bien que seulement 30% de l'énergie corresponde à des translations. Cependant pour cela il faut connaître le vecteur vitesse de vent (module et direction), le nombre total de couches et le profil de  $C_n^2$  avec une précision qui reste encore à définir. Ces modèles sont naturellement moins robustes que l'approche simple que l'on propose ici. Ce dernier aspect est d'importance majeure car de petits écarts aux valeurs nominales des grandeurs listées ci-dessus peuvent engendrer des pertes abruptes. Pour des systèmes d'imagerie à haut contraste tels que le GPI pour le télescope Gemini, le gain reste à mettre en évidence par rapport à une modélisation plus souple et plus robuste. Les résultats expérimentaux de [Petit, 2006] et [Petit *et al.*, 2009] discutent des compromis performance/robustesse et corroborent la pertinence et raisonnable de l'utilisation de modèles AR simples. Dans leurs expériences, les modèles d'évolution temporelle de type AR des modes de Zernike s'avèrent très appropriés pour la commande LQG, malgré une turbulence générée par des écrans rotatifs en réflexion, donc un comportement Taylor quasi pur.

Pour le cas modal des polynômes de Zernike les coefficients de la diagonale de  $\mathcal{A}_{\text{tur}}$  sont décroissants, fruit des vitesses d'évolution croissantes 4.5.

L'utilisation d'une base zonale mène aussi à une ré-interprétation des coefficients de la matrice  $\mathcal{A}_{\text{tur}}$ . Les coefficients de  $\mathcal{A}_{\text{tur}}$  sont maintenant égaux entre eux car il n'y a pas de raison de traiter différemment deux points quelconques dans l'espace (la phase est isotrope et homogène, cf. chapitre 2).

Compte tenu des bonnes performances des modèles AR simples, un modèle AR du premier ordre (AR1) est adopté ; par conséquent  $\mathcal{A}_{\text{tur}} = aI$ , avec  $a$  un coefficient choisi de façon à approximer la décorrélation théorique de  $\phi$  à un pas. Sous l'hypothèse de Taylor, les corrélations spatiale et temporelle sont équivalentes si l'on prend la distance  $\Delta r = V \cdot T_s$ , une fonction de la vitesse moyenne du vent  $V$  et du temps d'intégration ou temps de trame  $T_s$ .

Connaissant la décorrélation exponentielle du modèle AR1 [section 4.5] on en déduit tout simplement

$$a = \Sigma_\phi(V \cdot T_s) / \Sigma_\phi(0). \quad (5.22)$$

#### 5.3.1.4 Projection orthogonale sur l'espace des commandes

$$u_k = P \begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix} \hat{x}_{k|y_k}^{\text{tur}} = (N^T N)^{-1} N^T \hat{\phi}_{k+1|y_k}^{\text{tur}}$$

La matrice  $N$  étant creuse [Fig. 5.3], des méthodes par pivot de Gauss sont envisageables pour obtenir le résultat du produit de  $P$  par le vecteur  $\hat{\phi}_{k+1|y_k}^{\text{tur}}$  et ainsi obtenir la commande  $u_k$ . Des méthodes itératives sont aussi concevables, par exemple celle de [Yang et Vogel, 2006].

Une version légèrement modifiée de  $P$  peut être utilisée

$$P = (N^T N + \gamma I)^{-1} N^T \quad (5.23)$$

où la constante  $\gamma$  améliore le conditionnement et les performances en cas de saturation des actionneurs.

### 5.4 Filtrage de Kalman par résolution d'un système d'équations linéaires

$Ax = b$  creux

Toutes les opérations sauf la multiplication d'un vecteur par la matrice  $\mathcal{H}_\infty$  sont creuses en utilisant une base de modélisation zonale.

La matrice  $\mathcal{H}_\infty$  étant le produit de plusieurs opérations, dont l'inversion d'une expression où intervient la matrice de covariance d'erreur d'estimation  $\Sigma_\infty$ , n'est pas une matrice creuse.

Soit donc

$$\mathcal{H}_\infty \triangleq \Sigma_\infty (\mathcal{C}_d^{\text{tur}})^T \left( \mathcal{C}_d^{\text{tur}} \Sigma_\infty (\mathcal{C}_d^{\text{tur}})^T + \Sigma_w \right)^{-1}, \quad (5.24)$$

défini à la section 4.3.2.

Si le bruit entre sous-pupilles est considéré non corrélé alors  $\Sigma_w = \sigma_w^2 I$ , la matrice  $\mathcal{H}_\infty$  peut par conséquent s'écrire sous forme informations,

$$\mathcal{H}_\infty = \left( (\mathcal{C}_d^{\text{tur}})^T \mathcal{C}_d^{\text{tur}} + \sigma_w^2 \Sigma_\infty^{-1} \right)^{-1} (\mathcal{C}_d^{\text{tur}})^T. \quad (5.25)$$

Une forme équivalente est trouvée si le bruit n'est pas indépendant mais corrélé comme dans le cas des mesures LGS [Béchet *et al.*, 2009]. Dans ce cas la matrice devient bloc-diagonale.

**Démonstration : Forme information du filtre de Kalman.**

Pour obtenir l'Eq. (5.25), multiplier d'abord l'égalité

$$\Sigma_{\infty} (\mathcal{C}_d^{\text{tur}})^{\top} \left( \mathcal{C}_d^{\text{tur}} \Sigma_{\infty} (\mathcal{C}_d^{\text{tur}})^{\top} + \Sigma_w \right)^{-1} = \left( (\mathcal{C}_d^{\text{tur}})^{\top} \Sigma_w^{-1} \mathcal{C}_d^{\text{tur}} + \Sigma_{\infty}^{-1} \right)^{-1} (\mathcal{C}_d^{\text{tur}})^{\top} \Sigma_w^{-1} \quad (5.26)$$

par  $((\mathcal{C}_d^{\text{tur}})^{\top} \Sigma_w^{-1} \mathcal{C}_d^{\text{tur}} + \Sigma_{\infty}^{-1})$  à gauche et  $(\mathcal{C}_d^{\text{tur}} \Sigma_{\infty} (\mathcal{C}_d^{\text{tur}})^{\top} + \Sigma_w)$  à droite, puis simplifier jusqu'à obtenir l'identité. Avec  $\Sigma_w = \sigma_w^2 I$ , la dérivation de l'Eq. (5.25) est immédiate. ■

La solution de la multiplication d'un vecteur par  $\mathcal{H}_{\infty}$  peut ainsi être obtenue par la solution d'un système d'équations linéaires du type  $Ax = b$  avec

$$A = (\mathcal{C}_d^{\text{tur}})^{\top} \mathcal{C}_d^{\text{tur}} + \sigma_w^2 \Sigma_{\infty}^{-1}, \quad b = (\mathcal{C}_d^{\text{tur}})^{\top} (y_k - \hat{y}_k | \mathcal{Y}_{k-1}). \quad (5.27)$$

Sous l'hypothèse que  $A$  est creuse, alors des méthodes numériques itératives peuvent être mises en place à un coût calculatoire moindre. Bien évidemment, les gains en terme de calcul sont directement liés à la densité d'éléments non nuls de  $A$  et à la vitesse de convergence de la méthode spécifiquement employée pour résoudre le système d'équations.

Dans la définition de la forme (5.25), ce n'est plus la matrice de covariance d'erreur qui est utilisée mais son inverse  $\Sigma_{\infty}^{-1}$ .

L'application du lemme d'inversion matricielle et le complément de Schur permettent d'établir

$$\Sigma_{\infty}^{-1} \triangleq \begin{pmatrix} \Sigma_v^{-1} & -\Sigma_v^{-1} \mathcal{A}_{\text{tur}} \\ -\mathcal{A}_{\text{tur}}^{\top} \Sigma_v^{-1} & \Sigma_3^{-1} + \mathcal{A}_{\text{tur}}^{\top} \Sigma_v^{-1} \mathcal{A}_{\text{tur}} \end{pmatrix}, \quad \text{Matrice inverse de } \Sigma_{\infty} \quad (5.28)$$

où  $\Sigma_3$  satisfait l'équation de Riccati d'estimation de l'Eq. (5.6).

A ce stade, une expression de  $\Sigma_{\infty}^{-1}$  existe qui n'est toujours pas creuse. L'application de méthodes itératives, comme annoncé, n'est donc pas encore envisageable, sauf si  $\Sigma_{\infty}^{-1}$  est en effet creuse ou bien approximée par une matrice creuse.

**Démonstration : Matrice inverse de covariance d'erreur d'estimation.**

L'inversion par blocs de la matrice  $\Sigma_{\infty}$  définie à l'Eq. (5.5) est

$$\Sigma_{\infty}^{-1} = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2^{\top} \\ \Sigma_2 & \Sigma_3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} S_d^{-1} & -S_d^{-1} \Sigma_2 \Sigma_3^{-1} \\ -\Sigma_3^{-1} \Sigma_2 S_d^{-1} & \Sigma_3^{-1} + \Sigma_3^{-1} \Sigma_2 S_d^{-1} \Sigma_2^{\top} \Sigma_3^{-1} \end{pmatrix}, \quad (5.29)$$

où

$$S_d = \Sigma_1 - \Sigma_2^{\top} \Sigma_3^{-1} \Sigma_2, \quad (5.30)$$

est le complément de Schur de  $\Sigma_{\infty}$ .

Avec les définitions de  $\Sigma_{1,2,3}$  données à l'Eq. (5.5), il vient

$$\begin{aligned} S_d &= \Sigma_1 - \Sigma_2^{\top} \Sigma_3^{-1} \Sigma_2 \\ &= \mathcal{A}_{\text{tur}} \Sigma_3 \mathcal{A}_{\text{tur}}^{\top} + \Sigma_v - \mathcal{A}_{\text{tur}} \Sigma_3^{\top} \Sigma_3^{-1} \Sigma_3 \mathcal{A}_{\text{tur}}^{\top} \\ &= \Sigma_v, \end{aligned} \quad (5.31)$$

puisque  $\Sigma_3 = \Sigma_3^T$ . Il en découle immédiatement que

$$S_d^{-1} = \Sigma_v^{-1}. \quad (5.32)$$

Le terme croisé peut se simplifier aisément

$$\begin{aligned} -S_d^{-1} \Sigma_2^T \Sigma_3^{-1} &= -\Sigma_v^{-1} \mathcal{A}_{\text{tur}} \Sigma_3^T \Sigma_3^{-1} \\ &= -\Sigma_v^{-1} \mathcal{A}_{\text{tur}}, \end{aligned} \quad (5.33)$$

et pour son transposé

$$\begin{aligned} -\Sigma_3^{-1} \Sigma_2 S_d^{-1} &= -\Sigma_3^{-1} \Sigma_3^T \mathcal{A}_{\text{tur}}^T \Sigma_v^{-1} \\ &= -\mathcal{A}_{\text{tur}}^T \Sigma_v^{-1}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Enfin,

$$\begin{aligned} \Sigma_3^{-1} + \Sigma_3^{-1} \Sigma_2 S_d^{-1} \Sigma_2^T \Sigma_3^{-1} &= \Sigma_3^{-1} + \Sigma_3^{-1} \Sigma_3 \mathcal{A}_{\text{tur}}^T \Sigma_v^{-1} \mathcal{A}_{\text{tur}} \Sigma_3^T \Sigma_3^{-1} \\ &= \Sigma_3^{-1} + \mathcal{A}_{\text{tur}}^T \Sigma_v^{-1} \mathcal{A}_{\text{tur}}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

En regroupant tous ces termes, l'Eq. (5.28) est finalement obtenue. ■

#### 5.4.1 Approximation de la matrice de covariance d'erreur d'estimation

L'application de méthodes itératives au système linéaire défini par l'Eq. (5.27) implique que la matrice  $A$  soit creuse. Pour cela, il faut trouver une inverse de la matrice de covariance d'erreur d'estimation qui soit aussi creuse.

D'après l'Eq. (5.28), ceci n'est possible que si  $\mathcal{A}_{\text{tur}}$ ,  $\Sigma_v^{-1}$  et  $\Sigma_3^{-1}$  qui font partie de la définition de  $\Sigma_\infty^{-1}$  sont creuses.

##### Matrice d'évolution temporelle $\mathcal{A}_{\text{tur}}$ :

En choisissant un modèle AR1, avec  $\mathcal{A}_{\text{tur}}$  diagonale tel que proposé au paragraphe 5.3.1, la matrice d'évolution temporelle de la phase  $\mathcal{A}_{\text{tur}}$  est creuse.

##### Matrice de covariance du bruit d'état $\Sigma_v^{-1}$ :

Pour le modèle AR1 choisi

$$\bar{\phi}_{k+1} = \mathcal{A}_{\text{tur}} \bar{\phi}_k + v_k,$$

la matrice de covariance spatiale du bruit d'état s'écrit

$$\Sigma_v = \Sigma_\phi - \mathcal{A}_{\text{tur}} \Sigma_\phi \mathcal{A}_{\text{tur}}^T,$$

un résultat déjà énoncé par l'Eq. (4.104).

Puisque  $\mathcal{A}_{\text{tur}} = aI$ , la matrice de covariance de bruit d'état s'obtient sous la forme

$$\Sigma_v = \Sigma_\phi (1 - a^2) \quad (5.36)$$

alors que son inverse s'écrit tout simplement

$$\Sigma_v^{-1} = \frac{1}{(1 - a^2)} \Sigma_\phi^{-1}. \quad (5.37)$$

Pour le calcul de la matrice  $\Sigma_\phi^{-1}$  l'approximation proposée par [Ellerbroek, 2002] est adoptée. Selon cet auteur

$$\Sigma_\phi^{-1} \approx \gamma \nabla^4, \quad (5.38)$$

où  $\gamma$  est une constante et  $\nabla^4$  l'opérateur bi-harmonique  $\nabla^4 = \nabla^2 \cdot \nabla^2$ , avec  $\nabla^2$  le Laplacien  $\nabla^2 r = \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}$  dans le plan cartésien  $OxOy$  [Fig. 5.5]. La motivation principale qui a donné origine à cette approximation est que le spectre spatial de la turbulence atmosphérique est proportionnel à  $\nu^{-11/3} \approx \nu^{-4}$ . L'inverse de ce spectre dans le domaine direct conduit à un opérateur  $\propto \nabla^4$  qui, avec une description zonale, admet une représentation très creuse. Une amélioration de la régularisation apportée par l'opérateur bi-harmonique permettant de régulariser tous les modes dont la courbure est nulle, vu que ces modes sont dans le noyau de  $\nabla^4$ , est proposée par [Lee, 2007].

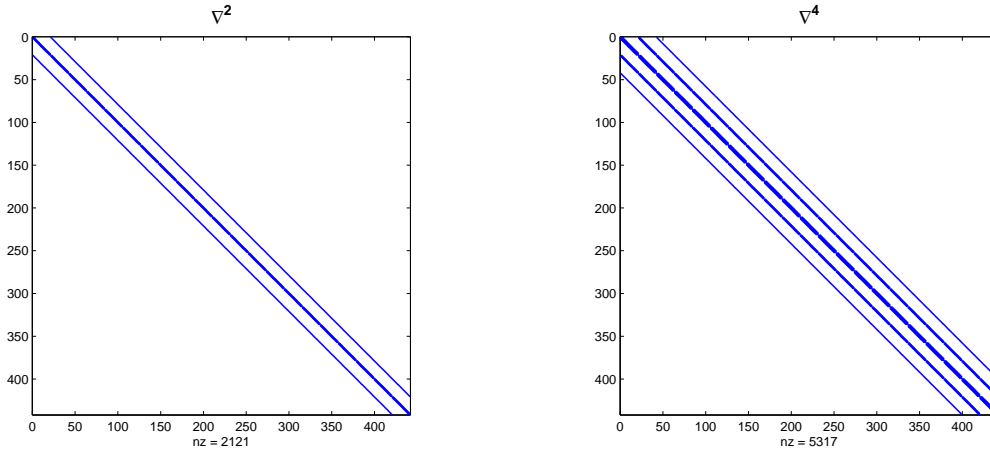


FIG. 5.5 – Exemples de Laplacien et opérateur bi-harmonique, utilisés lors de l'obtention d'une approximation creuse de la matrice de covariance de la phase.

En conséquence, d'après l'Eq. (5.37),  $\Sigma_v^{-1}$  possède donc aussi une représentation creuse.

#### Matrice de covariance d'erreur d'estimation $\Sigma_3^{-1}$

Sous conditions de fort rapport signal sur bruit, la DSP spatiale de la phase résiduelle est  $\propto \nu^{-2}$ , où  $\nu$  est le module de la fréquence spatiale. Sur la Fig. 5.6 sont représentées les DSP de la phase turbulente  $\phi^{\text{tur}}$ , celle de la phase reconstruite  $\hat{\phi}^{\text{tur}}$  et celle de la phase résiduelle  $\phi^{\text{res}} = \phi^{\text{tur}} - \hat{\phi}^{\text{tur}}$ .

Les filtres spatiaux appliqués s'obtiennent à partir des reconstruteurs statiques à variance minimale décrits à la section 3.5. La phase résiduelle présente une DSP spatiale proportionnelle à  $\nu^{-2}$  en régime de basses fréquences et ce jusqu'à ce que le bruit soit plus élevé que la perturbation de phase. Evidemment, au-delà de cette fréquence, la DSP de la phase résiduelle suit la loi des  $\nu^{-11/3}$ , puisque le reconstruteur, en présence d'un trop faible RSB applique l'estimée nulle, c'est-à-dire  $\hat{\phi}^{\text{tur}}(\nu > \nu_b) = 0$ . Ceci explique aussi pourquoi le reconstruteur moindres-carrés propage plus de bruit au travers la boucle : dans ce cas la DSP de la phase résiduelle est  $\propto \nu^{-2}$  dans toute la plage de fréquences. Au delà de  $\nu_b$  c'est du bruit qui est reconstruit, quand au mieux il faudrait estimer zéro.

En analogie avec l'erreur de reconstruction, on fait comme hypothèse que l'erreur d'estimation est composée d'un contenu fréquentiel de la même nature. Cette idée est au cœur du concept qu'on présente ici.

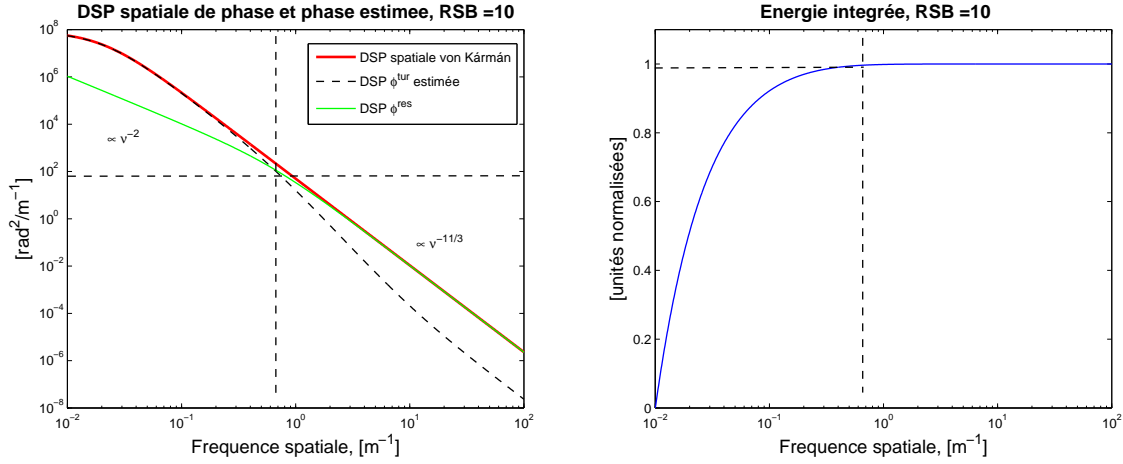


FIG. 5.6 – Gauche : Coupe radiale des DSP de la perturbation de phase  $\phi^{\text{tur}}$ , phase estimée  $\hat{\phi}^{\text{tur}}$  et erreur  $\phi^{\text{err}} = \phi^{\text{tur}} - \hat{\phi}^{\text{tur}}$ .  $\text{RSB} = E\{\|\phi\|^2\} / E\{\|w_\phi\|^2\}$ ,  $w_\phi$  le bruit intégré lors de la reconstruction, soit  $w_\phi = R^{\text{MMSE}} w$ .

Droite : Energie intégrée de la perturbation de phase. La quasi totalité de l'énergie se trouve au dessous de la fréquence  $\nu_b$ , la fréquence au-delà de laquelle le bruit est plus élevé que la phase.

Dans cette logique, une matrice approximative de  $\Sigma_3$  revêt une loi de puissance que l'on peut espérer connaître au préalable. En l'occurrence, la loi  $\propto \nu^{-2}$  est adoptée. Par conséquent,  $\Sigma_3^{-1} \approx \alpha \nabla^2$ , un opérateur qui n'a plus que cinq éléments non nuls pour chaque degré de liberté.

Avec les approximations  $\Sigma_\phi^{-1} \approx \gamma \nabla^4$ , et  $\Sigma_3^{-1} \approx \alpha \nabla^2$  la matrice

$$\Sigma_\infty^{-1} = \begin{pmatrix} \Sigma_v^{-1} & -\Sigma_v^{-1} \mathcal{A}_{\text{tur}} \\ -\mathcal{A}_{\text{tur}}^\top \Sigma_v^{-1} & \Sigma_3^{-1} + \mathcal{A}_{\text{tur}}^\top \Sigma_v^{-1} \mathcal{A}_{\text{tur}} \end{pmatrix}$$

est approximée par

$$\Sigma_\infty^{-1} \approx \begin{pmatrix} \frac{1}{1-a^2} \gamma \nabla^4 & -\frac{a}{1-a^2} \gamma \nabla^4 \\ -\frac{a}{1-a^2} \gamma \nabla^4 & \alpha \nabla^2 + \frac{a^2}{1-a^2} \gamma \nabla^4 \end{pmatrix}. \quad \Sigma_\infty^{-1} \text{ approximée.} \quad (5.39)$$

En conclusion,  $A = \mathcal{C}_d^\top \mathcal{C}_d + \sigma^2 \Sigma_\infty^{-1}$  se présente maintenant approximativement comme une matrice creuse. La validité des approximations proposées sera évaluée par des simulations numériques à la section 5.8 et la performance quantifiée.

#### Exemple : Matrice $\Sigma_\infty$ exacte et approximée

A titre d'exemple, la matrice de covariance de l'erreur d'estimation est montrée sur la Fig. 5.7 en utilisant l'algorithme de doublage et l'approximation par des opérateurs creux proposée ici. Des simulations numériques de Monte Carlo à la section 5.8 valident le remplacement de  $\Sigma_\infty$  par une version qui relève d'une approximation spectrale de l'erreur d'estimation ◀

##### 5.4.1.1 Obtention des facteurs multiplicatifs

La matrice de l'Eq. (5.39) fait intervenir deux constantes  $\gamma$  et  $\alpha$ . Selon [Gilles, 2003b], la valeur de  $\gamma$  se fixe en

$$\gamma \approx 1/2 \quad (5.40)$$



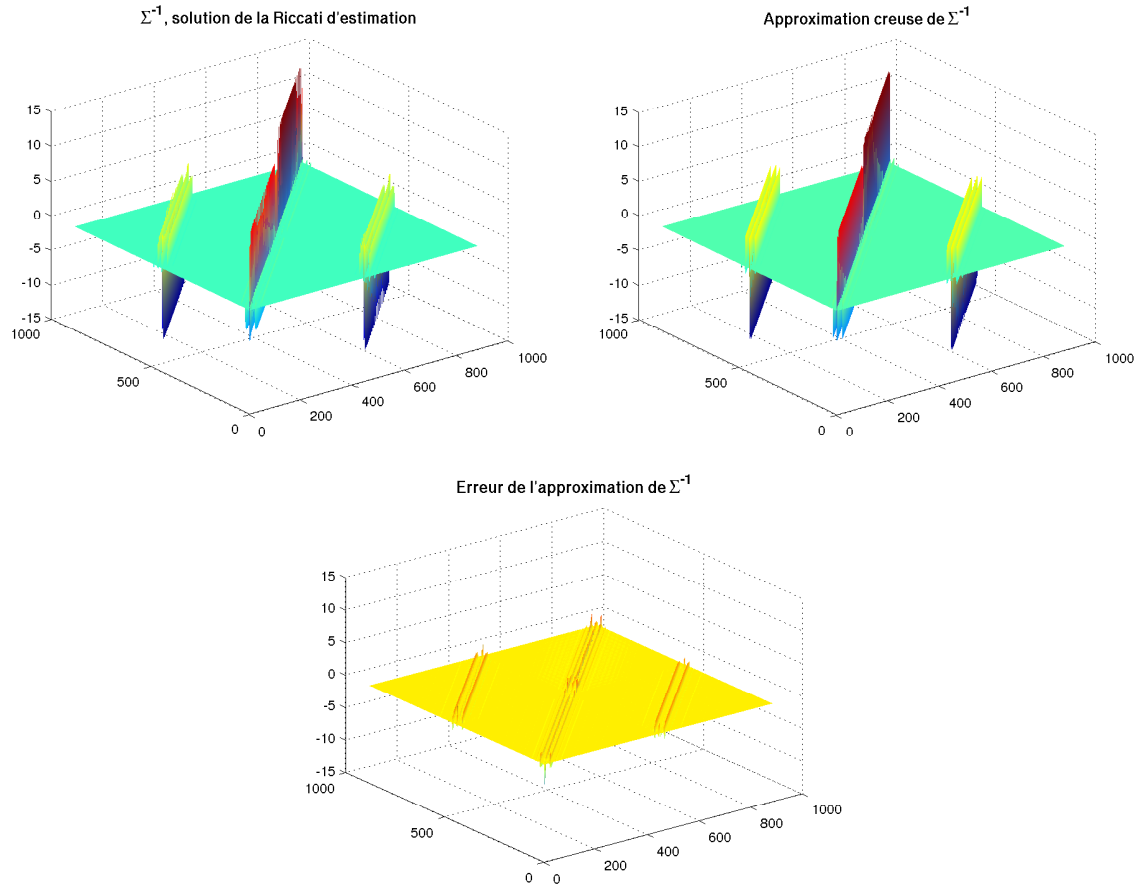


FIG. 5.7 – Gauche : solution exacte de  $\Sigma_{\infty}^{-1}$  ; Droite : approximation par une matrice creuse - Eq. (5.39). En bas : erreur entre la solution exacte et l'approximation creuse. La matrice creuse, en l'occurrence calculée pour un système de 20 par 20 sous-pupilles, présente un taux de remplissage de 2.73%.



pour n'importe quelle taille de grille de reconstruction, déduite de à partir de

$$\mathbb{E} \left\{ \phi^T \Sigma_\phi^{-1} \phi \right\} = \gamma \mathbb{E} \left\{ \phi^T \nabla^4 \phi \right\}, \quad (5.41)$$

qui suppose que  $\Sigma_\phi^{-1} \approx \gamma \nabla^4$ .

Pour la nouvelle valeur de  $\alpha$  [Eq. (5.39)], on propose une méthode de calcul qui n'a pas été testée.

Ayant proposée une analogie entre l'erreur de reconstruction statique et l'erreur d'estimation, la valeur de la constante  $\alpha$  peut s'obtenir de l'intégration spatiale de la phase résiduelle

$$\int_0^{\nu_s} 1/\alpha \mathbf{W}_{\phi^{err}} \approx 2\pi \left( \int_0^{\nu_b} b\nu^{-2} \nu \partial \nu + \int_{\nu_b}^{\nu_s} 0.023r_0^{-5/3} \nu^{-11/3} \nu \partial \nu \right), \quad (5.42)$$

où  $\nu_s$  est la fréquence spatiale la plus élevée et  $b$  le niveau de bruit de mesure en valeurs rms .

L'intégration se réalise aisément en coordonnées polaires

$$\int_0^{\nu_b} \int_0^{2\pi} F(\nu) \nu \partial \nu \partial \theta = 2\pi \int_0^{\nu_b} F(\nu) \nu \partial \nu, \quad (5.43)$$

puisque la fonction  $F(\nu)$  est à symétrie de révolution. La fréquence  $\nu_b$  correspond au point de croisement de la DSP du bruit dans l'espace des phases avec la DSP de la perturbation. Les allures sur la figure 5.6 en illustrent le principe.

## 5.5 Résolution itérative de systèmes linéaires creux du type $Ax = b$

La matrice  $A$  dans l'Eq. (5.27) admet maintenant une représentation creuse. L'application de méthodes itératives étant donc envisageable, ceci est le but principal de cette section.

Des généralités sur des méthodes itératives sont présentées avec des notions de pré-conditionnement de systèmes d'équations linéaires. On choisit plus précisément un pré-conditionneur dans l'espace de Fourier, sachant que les méthodes itératives candidates ne se restreignent pas à ce type particulier de pré-conditionneur. L'ouvrage de référence [Saad, 1996] a servi de base à l'ensemble des résultats de cette section.

### 5.5.1 Gradients conjugués

L'algorithme itératif des gradients conjugués est très efficace pour résoudre les systèmes d'équations linéaires symétriques et définis positifs ( $A^T = A$  et  $x^T Ax > 0$ ) du type [Saad, 1996]

$$Ax = b. \quad (5.44)$$

Son principe repose sur la recherche de directions successives permettant d'atteindre la solution exacte du système étudié en  $\dim(x)$  pas. En pratique, l'algorithme est itéré jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt soit franchi<sup>3</sup>. Son efficacité est incontestable, ce qui a conduit à l'utilisation de cet algorithme dans plusieurs travaux en OA – section 5.1.

Cette méthode vérifie à l'itération  $m$  et pour tout vecteur  $x$

$$|x^m - x|_A \leq 2\vartheta^m |x^0 - x|_A, \quad (5.45)$$

<sup>3</sup>Par exemple, jusqu'à ce que la stagnation de la convergence se situe au dessous de  $\epsilon$  arbitraire.

où  $\vartheta = \frac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1}$  et  $\kappa$  la valeur du conditionnement spectral  $\kappa = \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$  de la matrice  $A$ , ce qui souligne la dépendance du taux de convergence selon  $\sqrt{\kappa}$ .

Une possibilité pour s'affranchir d'un éventuel faible taux de convergence consiste à pré-conditionner le système d'équations linéaires présenté ci-dessus. Le pré-conditionnement permet d'augmenter le taux de convergence d'un algorithme itératif. Il consiste à trouver une matrice  $C^{-1}$  pour laquelle le produit  $(C^{-1}A)$  ait une dispersion de valeurs propres moins importante de façon à ce que le conditionnement spectral  $\kappa$  soit plus faible, ce qui a pour conséquence d'augmenter le taux de convergence [Saad, 1996, Vogel, 2002].

### 5.5.2 Pré-conditionnement

*"Finding a good preconditioner for solving a given sparse linear system is often viewed as a combination of art and science. Theoretical results are rare, and some methods work surprisingly well, despite expectations<sup>4</sup>".*

*J. Saad*

Le principe du pré-conditionnement d'un système d'équations linéaires consiste à remplacer la résolution de l'équation  $Ax = b$  par celle du système équivalent  $C^{-1}Ax = C^{-1}b$ . L'objectif est de trouver  $C^{-1}$  tel que  $\kappa(C^{-1}A) \ll \kappa(A)$ . C'est d'ailleurs cela qui justifie le nom attribué à cette opération de conditionnement préalable.

Théoriquement le meilleur choix serait donc  $C^{-1} = A^{-1}$ , puisque  $C^{-1}A = I$ . Dans la pratique, toutefois, il faut trouver  $C^{-1}$  le plus proche de  $A^{-1}$  sans que pourtant le coût calculatoire de la multiplication d'un vecteur par  $C^{-1}$  – étape 5 du PCG dans l'algorithme 2 – ne soit trop élevé.

Il existe trois formes distinctes pour pré-conditionneur d'un système linéaire : à gauche, à droite et si le produit  $C^{-1}A$  n'est plus symétrique, alors la racine carrée du pré-conditionneur est utilisée à droite et gauche de  $A$  [Saad, 1996]. Un pré-conditionneur est soumis aux trois conditions suivantes :

- être une approximation de la matrice  $A^{-1}$  du système linéaire (dans un sens encore à définir) ;
- être symétrique et défini positif ( $C^T = C$  et  $x^T C x > 0$ ) ;
- être creux - pour assurer un nombre faible d'opérations calculatoires avant d'atteindre la solution.

La méthode des gradients conjugués pré-conditionnés (PCG) est présentée dans l'algorithme 2 ci-dessous.

Concevoir un pré-conditionneur est une tâche ardue. Il se peut que des méthodes générales de pré-conditionnement soient extrêmement efficaces, évitant la recherche de pré-conditionneurs spécifiques adaptés.

Parmi la panoplie de pré-conditionneurs qui peuvent être trouvés dans la littérature, un relevé succinct est présenté en se focalisant sur des méthodes qui ont été appliquées à l'OA et qui sont donc candidates pour le pré-conditionnement du LQG itératif que l'on propose.

L'étape de pré-conditionnement consiste en lui même à résoudre un système d'équations linéaires du type  $Ax = b$ . Donc toute méthode itérative peut être utilisée pour réaliser le pré-conditionnement.

---

<sup>4</sup>Trouver un bon pré-conditionneur pour résoudre un système linéaire donné est souvent vu comme une combinaison d'art et de science. Les résultats théoriques sont rares et certaines méthodes marchent étonnamment bien, au-delà de toute attente. Traduction de l'auteur

**Entrée:**  $r_0 = b_k - Ax_0$ ,  $z_0 = C^{-1}r_0$  et  $p_0 = z_0$   
**pour chaque**  $m = 0, 1, \dots$ , **faire**  
  1 :  $q_m = Ap_m$ ; Multiplication par la matrice  $A$ ;  
  2 :  $\alpha_m = (r_m, z_m)/(q_m, p_m)$ ;  
  3 :  $x_{m+1} = x_m + \alpha_m p_m$ ;  
  4 :  $r_{m+1} = r_m - \alpha_m q_m$ ;  
  5 :  $z_{m+1} = C^{-1}r_{m+1}$ ; Multiplication par le pré-conditionneur  $C^{-1}$ ;  
  6 :  $\beta_m = (r_{m+1}, z_{m+1})/(r_m, z_m)$ ;  
  7 :  $p_{m+1} = z_{m+1} + \beta_m p_m$ ;  
**fin**

**Sortie:** Solution  $x_k = A^{-1}b_k$

**Algorithme 2:** Algorithme des gradients conjugués pré-conditionnés. L'opération  $(\cdot, \cdot)$  représente le produit interne de deux vecteurs, c'est-à-dire  $(a, b)$  équivaut à  $a^T b$ . Les étapes 1. et 5. impliquent des multiplications matrice-vecteur (VMM), de loin les plus coûteuses. L'étape 5. représente la multiplication par le pré-conditionneur.

### 5.5.2.1 Pré-conditionneur diagonal

En première approximation, la diagonale de la matrice  $A$  forme un pré-conditionneur général, mais un peu grossier. Selon la structure de  $A$ , il peut s'avérer efficace ou pas. Par exemple, dans les travaux de [Tallon *et al.*, 2007], cette approximation est proposée.

### 5.5.2.2 Méthode multigrilles

Les méthodes multigrilles [Hackbusch, 1985] consistent à annuler les composantes spectrales basses fréquences de l'erreur d'estimation du vecteur  $x$  en le projetant sur des grilles de différentes résolutions. Les composantes basses fréquences sur une grille fine acquièrent alors un caractère de hautes fréquences sur une grille grossière. Cette erreur peut ensuite être atténuée comme s'il s'agissait effectivement de composantes haute fréquence.

Le fonctionnement de cette méthode itérative peut se résumer de la façon suivante

- Appliquer un pas de lissage ;
- Projeter l'erreur de basses fréquences sur une grille plus grossière ; ainsi elle devient haute-fréquence et peut alors être atténuée ;
- Résoudre le système défini sur la grille grossière avant de projeter l'erreur de retour sur une grille plus fine ;
- Mettre à jour la solution et appliquer ensuite un pas de lissage pour éliminer l'erreur haute fréquence.

Cette procédure est communément appelée « algorithme à deux grilles ». La version complète consiste à appliquer récursivement la procédure à deux-grilles.

Une description complète se trouve dans les ouvrages [Hackbusch, 1985] et [Saad, 1996]. [Gilles *et al.*, 2002, Gilles, 2003a, Gilles, 2003b] utilisent cette méthode itérative pour pré-conditionner le problème de reconstruction tomographique dans le volume atmosphérique. Le multigrilles a été validé expérimentalement en OA classique par [Lessard *et al.*, 2008]. D'autres travaux l'utilisent en reconstruction de font d'onde comme ceux de [Vogel et Yang, 2004, Barchers, 2004, Ren *et al.*, 2005].

### 5.5.2.3 Pré-conditionnement en espace de Fourier

Dans cette section les aspects fondamentaux du pré-conditionnement en espace de Fourier sont abordés, suivant une présentation proche de celle de [Yang *et al.*, 2006].

D'après la discussion entamée au chapitre 3 sur la représentation du reconstituteur VM dans l'espace Fourier, il semble tout à fait naturel d'utiliser la circonstance favorable que les matrices du problème direct soient quasi diagonales une fois représentées en espace Fourier, donc très facilement inversibles et à moindre coût calculatoire, pour pré-conditionner le problème de la commande LQG. C'est ce que proposent [Yang *et al.*, 2006] pour la reconstruction de front d'onde en OA à grand nombre de degrés de liberté. En s'inspirant de cette formulation, des modifications sont proposées pour l'adapter au contexte de commande LQG en boucle fermée.

On peut, puisque on aborde le passage en Fourier dans un contexte LQG, se poser la question suivante : pourquoi ne pas représenter toutes les variables en Fourier pour obtenir un filtre de Kalman en Fourier comme celui proposé par [Poyneer *et al.*, 2007]. En effet les opérations élémentaires à entreprendre dans le cadre de l'OA sont caractérisées par un noyau convolutif. Cette opération est diagonalisable en espace de Fourier. Néanmoins, ce raisonnement atteint ses limites. L'opération est effectivement diagonale si le support est considéré infini ou les opérations circulaires – l'intégrale de convolution est donc non bornée. Or, ceci n'est généralement pas vrai en OA, où des dimensions physiques de l'ouverture du télescope imposent des limites. Le problème n'est pas non plus circulaire, bien que raisonnablement bien approximé par des opérations circulaires. En plus, comme cela a déjà été détaillée, l'adaptation de l'ouverture annulaire du télescope à un domaine carré sur lequel est définie la base des fonctions de Fourier oblige à gérer des problèmes de bords [section 3.5].

### 5.5.2.4 Définition du pré-conditionneur dans l'espace Fourier

Un pré-conditionnement mono-couche est présenté, généralisable au cas multi-couches. Pour cela le profil de  $C_n^2(h)$  est nécessaire. Sous l'hypothèse de l'indépendance des couches atmosphériques, il vient  $\Sigma_\phi = \text{BlockDiag} \Sigma_{\phi,l}$ . [Yang *et al.*, 2006] font une présentation pour le cas général multi-couches.

La matrice de covariance de la phase  $\Sigma_\phi$  peut être construite de la façon suivante

$$\mathbf{W}_\phi \propto \mathcal{F}^{-1} \left\{ |\nu|^{-11/3} \right\}, \quad (5.46)$$

où  $\mathcal{F}$  est la transformée de Fourier.

La matrice de covariance de bruit est aussi diagonale par blocs, puisque le bruit est considéré non corrélé entre sous-pupilles. Il vient alors

$$\mathbf{W}_w = \sigma_w^2 \mathbf{I}, \quad (5.47)$$

où  $\sigma_w^2$  est la variance de bruit sous chaque sous-pupille et  $\mathbf{I}$  la matrice identité de taille appropriée.

La matrice  $\mathbf{D}$  est composée du produit de deux opérateurs : le masque ( $\Omega$ ) et les gradients discrets ( $\mathbf{D}^\infty$ ). L'équation de mesure devient ainsi

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_x \\ \mathbf{D}_y \end{pmatrix} \bar{\phi} = \begin{pmatrix} \Omega \mathbf{D}_x^\infty \\ \Omega \mathbf{D}_y^\infty \end{pmatrix} \bar{\phi}. \quad (5.48)$$

L'opérateur pupille, est défini par

$$\Omega s(\mathbf{x}) = \begin{cases} s(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \text{pupille;} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}. \quad (5.49)$$

Les mesures pour la géométrie de Fried sont définies à la section 3.3.1.1. Pour une ouverture de taille infinie, les opérateurs  $D_x^\infty$  and  $D_y^\infty$  admettent en effet une représentation diagonale <sup>5</sup>.

Ainsi,

$$D_x^\infty = \mathcal{F}^{-1} \{ \mathbf{D}_x^\infty \}, \quad (5.50a)$$

$$D_y^\infty = \mathcal{F}^{-1} \{ \mathbf{D}_y^\infty \}. \quad (5.50b)$$

En regroupant les termes, il vient finalement

$$D^T D = \left( (D_x^\infty)^T \Omega^T \Omega D_x^\infty + (D_y^\infty)^T \Omega^T \Omega D_y^\infty \right). \quad (5.51)$$

L'équation (5.51) n'admet pas une transformée de Fourier diagonale car l'opérateur  $\Omega$  ne représente pas une convolution. Cependant, puisque le but de la construction d'un pré-conditionneur est de trouver une approximation suffisamment proche de la matrice  $A$  dans l'Eq. (5.44), alors il est suffisant de garder un ensemble de points au centre de  $\Omega = \mathcal{F}\{\Omega\}$ . Selon [Yang *et al.*, 2006], ceci s'avère convenable pour assurer une convergence rapide de l'algorithme des gradients conjugués pré-conditionnés.

En suivant la suggestion de Yang *et al.* on adopte la représentation de Fourier

$$\mathcal{F}^{-1} \{ D^T D \} \approx \mathcal{F}^{-1} \left\{ \left( (\mathbf{D}_x^\infty)^H \tilde{\Omega}^H \tilde{\Omega} \mathbf{D}_x^\infty + (\mathbf{D}_y^\infty)^H \tilde{\Omega}^H \tilde{\Omega} \mathbf{D}_y^\infty \right) \right\}, \quad (5.52)$$

où  $\tilde{\Omega}$  est une approximation  $\Omega$  valable pour les grande systèmes car  $\mathcal{F}\{\Omega\}$  est très localisée.

Tous ces opérateurs ont désormais une représentation diagonale en espace de Fourier; la multiplication de matrices diagonales est  $O(n)$  à la place de  $O(n^2)$ .

Le préconditionneur s'écrit donc

$$C^{-1} = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \left( (\mathbf{D}_x^\infty)^H \tilde{\Omega}^H \tilde{\Omega} \mathbf{D}_x^\infty + (\mathbf{D}_y^\infty)^H \tilde{\Omega}^H \tilde{\Omega} \mathbf{D}_y^\infty \right) + \sigma_w^2 \mathbf{W}_\phi^{-1} \right\}^{-1}. \quad (5.53)$$

La version itérative de la commande LQG est dénommée FD-PCG-LQG pour *Fourier-Domain Preconditioned Conjugate Gradient LQG*.

## 5.6 Mise en œuvre de la commande LQG itérative

La modélisation zonale proposée pour la commande LQG étant potentiellement moins lourde, elle est aussi plus souple, puisque la mise à jour des opérateurs se fait désormais plus aisément. L'inversion du reconstituteur n'a jamais explicitement lieu et les calculs hors-ligne ont été remplacés par des opérateurs spectraux de facile obtention. Sachant que la stationnarité n'est jamais de fait acquise, les changements des conditions d'observation entraînent une mise à jour régulière des opérateurs. En OA cette procédure est réalisée toutes les dizaines de secondes, ce qui joue en faveur de méthodes facilement mises à jour en cours d'opération, comme celle présentée ici.

Les multiplications vecteur-matrice (VMM) dans l'algorithme des PCG sont détaillées ci-dessous. Elles concernent la matrice  $A$  et la matrice  $C^{-1}$  respectivement.

<sup>5</sup>Le noyau convolutif donne origine à des matrices BTTB – *block Toeplitz with Toeplitz blocks*, très bien approximées par des matrices BCCB – *block circulant with circulant blocks* – celles-ci diagonales en Fourier.

### 5.6.1 Multiplication par la matrice $A$

La multiplication d'un vecteur  $p_m$  par la matrice  $A$  (étape 1. de l'algorithme 2) est réalisée en deux temps, puisque la matrice  $A$  est la somme de deux composantes :  $(C_d^{\text{tur}})^T C_d^{\text{tur}}$  et  $\sigma_w^2 \Sigma_\infty^{-1}$  dans l'Eq. (5.27). D'après les définitions de  $C_d^{\text{tur}}$  [Eq. (5.4)] et  $\Sigma_\infty^{-1}$  [Eq. (5.28)], il vient

$$Ap_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D^T D \end{pmatrix} p_m + \sigma_w^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{1-a^2} \gamma \nabla^4 & -\gamma \frac{a}{1-a^2} \nabla^4 \\ -\frac{a}{1-a^2} \gamma \nabla^4 & \alpha \nabla^2 + \frac{a^2}{1-a^2} \gamma \nabla^4 \end{pmatrix} p_m. \quad (5.54)$$

Sur la Fig. 5.8 le motif de remplissage de la matrice  $A$  dans l'Eq. (5.54) est affiché pour un système composé de  $20 \times 20$  sous-pupilles.

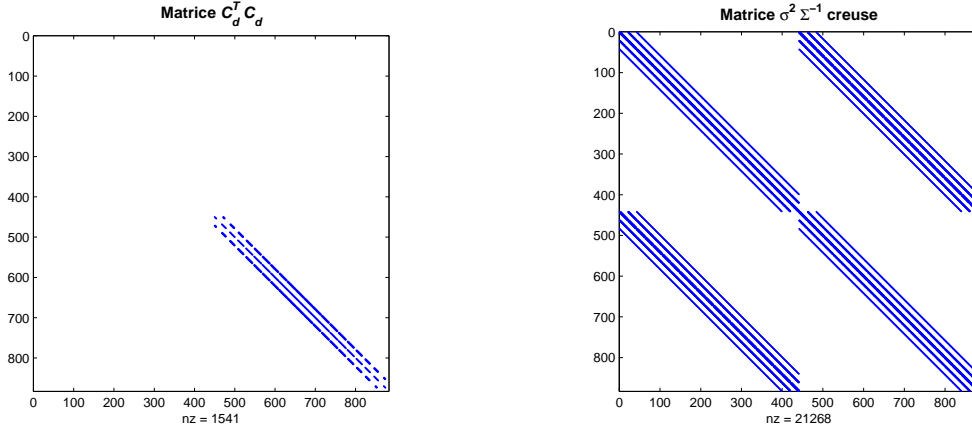


FIG. 5.8 – Matrice  $(C_d^{\text{tur}})^T C_d^{\text{tur}}$  et matrice  $\sigma_w^2 \Sigma_\infty^{-1}$  pour un système de 20 par 20 sous-pupilles. Taux de remplissage de 0.2% et 2.73% respectivement.

Soit  $A$  soit  $\Sigma_\infty^{-1}$  présentent un taux de remplissage proportionnel à  $n$ . La complexité de la multiplication est ainsi réduite de  $O(n^2)$  en  $O(n)$ , avec un facteur devant  $n$  qui dépend de la taille du système d'OA modélisé. Ce taux décroît avec l'augmentation du nombre de degrés de liberté.

### 5.6.2 Multiplication par le pré-conditionneur $C^{-1}$ dans l'espace de Fourier

Le pré-conditionneur étant construit dans le domaine des fréquences spatiales, la multiplication  $C^{-1} r_m$  est réalisée comme le montre l'algorithme 3 [Yang et al., 2004].

**Entrée:**  $r_m$

$\mathbf{r} \leftarrow \text{TF}\{r_m\};$

$\mathbf{r}_{m+1} \leftarrow \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{r}_m;$

$r_{m+1} \leftarrow \text{TF}^{-1}\{\mathbf{r}_{m+1}\};$

**Sortie:** Solution  $r_{m+1} = C^{-1} r_m$

**Algorithme 3:** Multiplication en espace de Fourier. La matrice  $\mathbf{C}^{-1}$  est diagonale.

La première action consiste à calculer la TF de  $r_m$ . Les coefficients de Fourier dans  $\mathbf{r}_m$  sont ensuite multipliés fréquence par fréquence par les coefficients de  $\mathbf{C}^{-1}$  avant d'être rassemblées dans  $r_{m+1}$  par transformée de Fourier inverse.

La multiplication par le pré-conditionneur s'effectue ainsi

$$\mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{D}^H \mathbf{D} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{r} + \sigma_w^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{1-a^2} \mathbf{W}_\phi^{-1} & -\frac{a}{1-a^2} \mathbf{W}_\phi^{-1} \\ -\frac{a}{1-a^2} \mathbf{W}_\phi^{-1} & \alpha \mathbf{W}_3^{-1} + \frac{a^2}{1-a^2} \mathbf{W}_\phi^{-1} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{r}, \quad (5.55)$$

où évidemment

$$\mathbf{W}_3^{-1} = \mathbf{TF} \{ \Sigma_3^{-1} \}, \quad (5.56)$$

par l'application immédiate du théorème de Wiener-Khinchine. Le spectre spatial de la phase est donné à la section 2.3.2.

La transformée de Fourier discrète étant implémentée de façon très efficace par la FFT, la complexité du calcul  $r_{m+1} = \mathbf{C}^{-1} r_m$  est réduite de  $O(n^2)$  en  $O(n \log(n))$ .

## 5.7 Analyse algorithmique

Puisqu'on s'intéresse aux GNDL, il apparaît tout à fait naturel de s'intéresser au nombre d'opérations effectivement réalisées par chacune des méthodes existantes. Les comparer permet de conclure sur leur intérêt. L'unité de mesure est le nombre de multiplications suivies d'accumulation au résultat précédent. L'acronyme anglais MAC pour *multiply and accumulate* est utilisé.

### 5.7.1 Structure des calculs

#### 5.7.1.1 Commande par intégrateur

La récurrence de commande de l'intégrateur décrite à la section 2.8 utilise une matrice de commande qui relève directement de la matrice d'interaction  $M_{int} = \mathbf{DN}$  sous la forme

$$\mathbf{M}_{com} = \left( \mathbf{M}_{int}^T \Sigma_{w,u}^{-1} \mathbf{M}_{int} + \Sigma_{\phi,u}^{-1} \right)^{-1} \mathbf{M}_{int}^T \Sigma_{w,u}^{-1} \quad (5.57)$$

où  $\Sigma_{\phi,u}$  et  $\Sigma_{w,u}$  sont les matrices de covariance spatiale de phase et bruit de mesure dans l'espace miroir.

Si le régulateur est défini dans l'espace des phases, alors deux étapes sont à réaliser. D'abord calcul des paramètres de la phase à partir des mesures

$$\mathbf{M}_{com}^m = \left( \mathbf{D}^T \Sigma_w^{-1} \mathbf{D} + \Sigma_\phi^{-1} \right)^{-1} \mathbf{D}^T \Sigma_w^{-1} \quad (5.58)$$

avec  $\Sigma_\phi^{-1}$  adaptée à la boucle fermée [Louarn et Tallon, 2002], suivie d'une projection sur l'espace miroir à travers le projecteur  $(\mathbf{N}^T \mathbf{N})^{-1} \mathbf{N}^T$ . A ce sujet, voir aussi la section 3.8.

Les gains du régulateur sont ensuite optimisés selon la procédure décrite à la section 2.8.2.2.

Les matrices  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{N}$ , dont les motifs sont représentés sur la Fig. 5.3, sont creuses si modélisées sous approche zonale. Ceci n'est pas le cas si une approche modale est utilisée. Dans ce cas  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{N}$  sont pleines.

En ce qui concerne la matrice de covariance de la phase, c'est l'opposé : elle est pleine pour le cas zonal et creuse pour le cas modal. La matrice de covariance de bruit de mesure  $\Sigma_w$  est souvent prise comme une matrice diagonale, tant pour le cas modal [Rigaut et Gendron, 1992] que pour le zonal. Malgré ces différences, la matrice  $\mathbf{M}_{com}$ , qu'il s'agisse de modélisation modale ou zonale est toujours pleine pour cause de l'inversion du terme  $\left( \mathbf{D}^T \Sigma_w^{-1} \mathbf{D} + \Sigma_\phi^{-1} \right)^{-1}$ .

Les définitions suivantes sont utilisées :



- $n_m$  : nombre de mesures ;
- $n_a$  : nombre d'actionneurs
- $n_\phi$  : nombre de paramètres de la phase
- $nnz$  : nombre d'éléments non nuls dans une matrice

**5.7.1.1.1 Calculs hors ligne :** Inversion de la matrice d'interaction ou des matrices D et N séparément.

**5.7.1.1.2 Calculs temps réel :** La commande par intégrateur utilise  $n_m n_a \approx 2n^2$  opérations MAC.

### 5.7.1.2 Commande LQG

**5.7.1.2.1 Calculs hors ligne :** Résolution de la Riccati d'estimation par l'algorithme de doublage sur une seule composante de phase de l'état [§5.2.1.1]. Vis-à-vis de la solution obtenue par solution de l'itération de point-fixe, une réduction de plus de deux ordres de grandeur est atteinte, car l'inversion est maintenant de matrices de la moitié de la taille de celle du problème initial ; avec un nombre d'itérations a réduit d'un facteur de  $N_{iter}/\log(N_{iter})$  – voir les courbes sur la Fig. 5.1, où  $N_{iter}$  est le nombre d'itérations de l'algorithme classique.

**5.7.1.2.2 Calculs temps réel :** Il est considéré que la matrice D n'a que 4 éléments non nuls par ligne – Fig. 5.3 – et que les fonctions d'influence de N n'ont qu'une région d'influence de 4 par 4 sous-pupilles, ce qui signifie 5 par 5 éléments non nuls autour de de chaque actionneur.

**Commande FD-PCG-LQG zonale :** La complexité de l'algorithme FD-PCG-LQG est

$$(1 + n_{it}) (nnz(A) + 4n_\phi + 4[n_\phi + kn_\phi \log(n_\phi)]) + nnz(D^T D) + nnz(D^T) \quad (5.59)$$

opérations<sup>6</sup>, où  $n_\phi$  est la taille d'une occurrence de phase dans l'état et  $n_{it}$  le nombre d'itérations des gradients conjugués. Les premières  $nnz(A) + 2n_\phi$  correspondent à l'initialisation de l'algorithme 2. L'étape 1. du FD-PCG représente  $nnz(A)$  opérations, avec  $\alpha_k$  et  $\beta_k$  correspondant à  $4n_\phi$ , puisque les deux occurrences de phase sont tenues en compte. La multiplication en espace Fourier par l'inverse du pré-conditionneur contribue avec  $2n_\phi$  MAC. Les transformées directe et inverse de Fourier sont réalisées 2 fois par itération, avec un facteur  $k$  selon l'architecture de traitement. Dans le cas le plus commun  $k \approx 5$ <sup>7</sup>. Enfin, le calcul de  $b$ , le terme à droite du système linéaire correspond à  $nnz(D^T D) + nnz(D^T)$ .

## 5.7.2 Complexité calculatoire

Le tableau 5.1 compare, étape par étape, la complexité des commandes LQG modale et zonale.

La somme des tous les calculs réalisés en temps réel est récapitulée au tableau 5.2. Les calculs de la mise en œuvre en temps réel de la commande LQG sont particularisés pour une modélisation modale, zonale puis étendus au cas itératif du FD-PCG-LQG.

Sur la Fig. 5.9 sont tracées les courbes de complexité correspondant aux résultats du tableau 5.2. Pour les systèmes de la taille de SPHERE et GPI, aux alentours de  $\approx 40 \times 40$  degrés de liberté, les

<sup>6</sup>Additions et multiplications par scalaires sont négligeables.

<sup>7</sup>Voir section 3.9.



TAB. 5.1 – Complexité calculatoire des algorithmes de commande.  $n_\phi$  : nombre de modes turbulents à estimer,  $n_L$  : nombre de couches dans le volume,  $n_m$  : nombre de mesures et  $n_a$  : nombre d'actionneurs. La fonction d'influence d'un actionneur est considérée ici sur une zone de  $6 \times 6$  points.

Type	Mesure estimée	Prédiction	Projection	Total
VMM intégrateur	–	–	$n_m n_a$	$n_m n_a$
LQG base modale	$n_m(n_\phi + n_a)$	$2n_\phi n_m$	$n_a n_\phi$	$n_m(3n_\phi + 2n_a)$
LQG base zonale	$40n_m$	$2n_\phi n_m$	$n_a n_\phi$	$n_m(40 + 2n_\phi + n_a)$

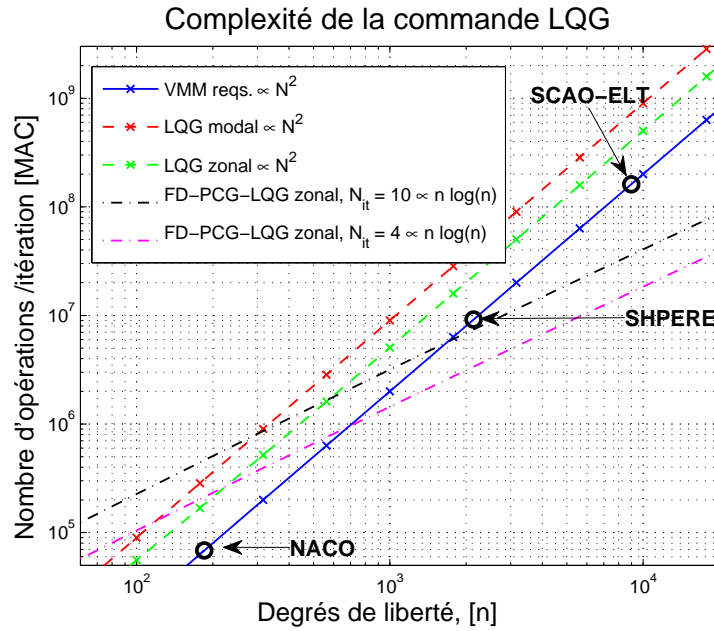


FIG. 5.9 – Complexité de la commande LQG modale et zonale. Les coûts calculatoires de la nouvelle approche FD-PCG-LQG sont tracés pour comparaison. Les lois sont détaillées sur le tableau 5.2.

gains de l'usage du FD-PCG-LQG sont déjà discernables. Pour les ELT les gains croissent, étant plus élevés d'un voire deux ordres de grandeur.

TAB. 5.2 – Complexité des algorithmes de commande.  $n_\phi$  : nombre de modes turbulents à estimer,  $n_L$  : nombre de couches dans le volume,  $n_m$  : nombre de mesures et  $n_a$  : nombre d'actionneurs.

Type	Temps-réel
VMM intégrateur	$n_m n_a$
LQG base modale	$n_m(n_\phi + n^a) + 2n_\phi n_m + n_a n_\phi$
LQG base zonale	$29n_m + 2n_\phi n^m + n_a n_\phi$
FD-PCG-LQG	$29n_m + (1 + n_{it})(nnz(A) + 4[2n_\phi + kn_\phi \log(n_\phi)]) + nnz(D^T D) + nnz(D^T) + n_{it}^{proj} kn_\phi \log(n_\phi)$

## 5.8 Performances avec approximations : évaluation par simulations Monte Carlo

On propose ici d'évaluer les performances au moyen de simulations numériques de Monte Carlo, pour un système d'OA classique avec 20 par 20 sous-pupilles. Ce système est certes de taille moyenne, mais cela permet d'ores et déjà de faire apparaître des tendances entre les approches modale et zonale afin d'établir un budget d'erreurs.

Les conditions de simulation sont résumées dans le tableau 5.3. La géométrie choisie est celle de Fried.

Quatre versions de l'algorithme LQG sont simulées :

- (i) version classique sous approche modale, consistant à modéliser le problème avec une base de polynômes de Zernike ;
- (ii) version creuse sous approche zonale, où les grandeurs sont discrétisées sur une grille de points aux coins des sous-pupilles (où se trouvent aussi les actionneurs, car géométrie de Fried). Aucune approximation n'est prise pour les matrices de la commande LQG ;
- (iii) version creuse zonale avec calcul explicite du gain de Kalman à partir de l'approximation creuse de  $\Sigma_\infty^{-1}$  ;
- (iv) version itérative et creuse FD-PCG-LQG, basée sur l'approche zonale du point précédent. Les calculs de vecteurs par matrices sont remplacés par la méthode itérative de gradients conjugués pré-conditionnés dans l'espace de Fourier [§5.5.2.3]

La validation par simulation des algorithmes de ce chapitre se fait en deux étapes : 1) comparaison de la commande LQG sous approche modale (aussi dite classique) avec la commande LQG sous approche zonale afin de vérifier que l'utilisation d'une matrice creuse garantit les mêmes niveaux de performance que l'approche modale [§5.8.1] ; 2) comparaison des versions précédentes avec la commande LQG utilisant l'approximation proposée, mais en gardant le calcul explicite du gain de Kalman et enfin 3) la version FD-PCG-LQG est mise en place et comparée aux versions précédentes [§5.8.2].

### 5.8.1 Validation des approches de commande LQG avec une modélisation zonale

Avant de s'attaquer à la validation de la commande LQG itérative, proposition principale de ce chapitre, on va d'abord vérifier que la version zonale exacte (*i.e.* sans approximation du gain de

TAB. 5.3 – Paramètres de simulation. Les valeurs en gras repèrent les valeurs par défaut pour des paramètres dont la variation est testée par simulations de Monte Carlo. En gras les paramètres utilisés par défaut.

Paramètres de simulation		
Atmosphère	$C_n^2$	3 couches, {0,5;0,2;0,3}
	Vent	{10;5;15}ms <sup>-1</sup>
	Direction	{0;90;180} <sup>o</sup>
	No. modes	400
	$L_0$	25m
	$\lambda$	0,5 $\mu$ m
	seeing	0,65"
	$r_0$ @ 0,5 $\mu$ m	0.155m
	Résolution spatiale	0,1m
ASO	Type	géométrique
	Nb. sous-pupilles	20 (linéaire), 316 (total)
	Nb. pixels/sous-pupille	4
	Sous-éclairage	0,75
	$\lambda$	0,5 $\mu$ m
	Bruit lecteur	2e <sup>-</sup>
MD	Nb. actionneurs	21 (linéaire), 357 (total)
	Couplage mécanique	0,2
Simulation	D	8m
	Occultation centrale	0m
	$T_s$	2ms
	Magnitude	8-14
	$\lambda_{sci}$	2,2 $\mu$ m

Kalman) garantit les mêmes niveaux de performance que l'approche consistant à utiliser une base de polynômes de Zernike.

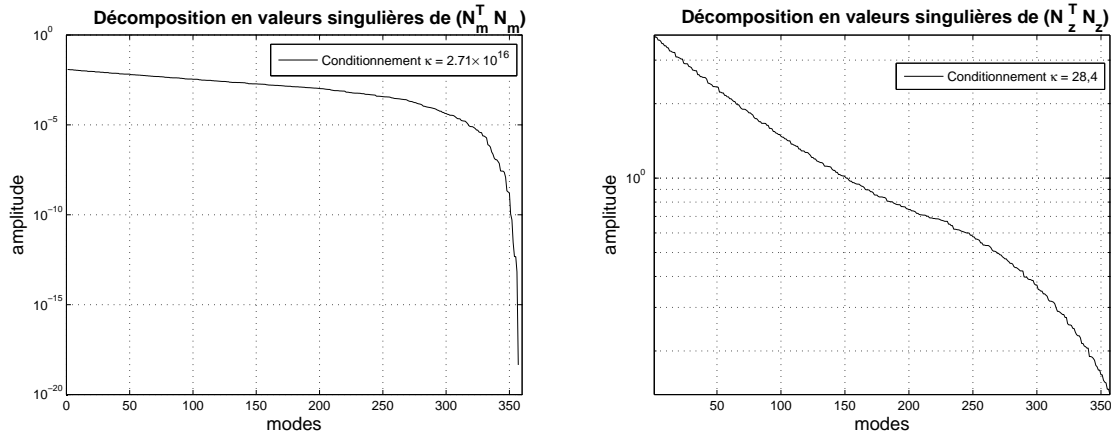


FIG. 5.10 – Décomposition en valeurs singulières de la matrice de projection de phase sur l'espace des commandes. Gauche : cas modal modélisé avec une base de polynômes de Zernike ; droite : modélisation zonale.

Une différence majeure ressort immédiatement de la décomposition en valeurs singulières de la matrice de projection de la phase dans l'espace des commandes. Pour le cas de la base de polynômes de Zernike, et dans les conditions de simulation du tableau 5.3, le conditionnement de  $(N^T N)$  atteint  $\kappa > 10^{16}$ , tandis que pour une modélisation zonale le conditionnement se trouve confortablement autour de l'unité, en l'occurrence  $\kappa \approx 28$ . Les courbes sur la Fig. 5.10 montrent la décomposition de la matrice  $(N^T N)$  pour les cas modal et zonal.

Ce mauvais conditionnement implique une troncature importante du nombre de modes propres de  $(N^T N)$ . Ceci n'est pas anodin. Le tableau 5.4 montre qu'en terme de rapport de Strehl longue pose l'approche modale se place derrière l'approche zonale d'environ 1% et ce en utilisant le même nombre de degrés de liberté dans les deux cas (400 polynômes de Zernike et 400 points de phase). Du point de vue numérique, la mise en place de la commande LQG avec une approche modale souffre donc d'une dégradation qui relève du mauvais conditionnement dû à la base de modélisation. Ceci joue en effet en faveur de l'utilisation de l'approche zonale, ce qui constitue un sous produit intéressant de l'analyse menée.

TAB. 5.4 – Rapport de Strehl longue pose pour les commandes modale et zonale. Le FD-PCG-LQG utilise 8 itérations par trame. La résolution spatiale de la phase reconstruite est de  $0,5 \text{ m}^{-1}$ .

	$\Sigma_\infty$ utilisée	Rapport de Strehl longue pose (%)
(i)	Modale	80.56
(ii)	Zonale	81.55

Selon l'application visée, l'étude de la fonction d'étalement de point présente aussi un intérêt essentiel. La moyenne radiale des FEP longue pose modale et zonale obtenue par simulations de Monte Carlo est présentée sur la Fig. 5.11. Ces deux courbes sont quasiment indistinctes : que ce

soit en terme de FEP ou en terme de SR, l'approche zonale donne donc sur les exemples traités des résultats très concluants.

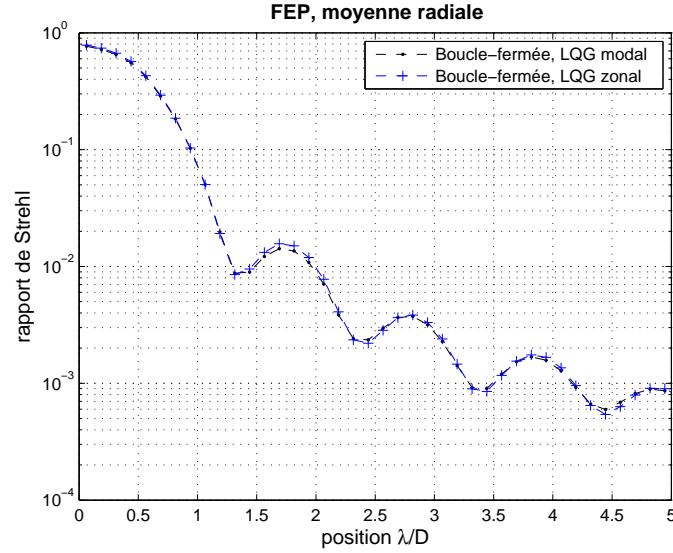


FIG. 5.11 – Moyenne radiale des FEP en longue pose pour les commandes modale et zonale. Temps de simulation : 2s.

### 5.8.2 Le FD-PCG-LQG

Les résultats sont maintenant comparés à l'approche simplificatrice proposée à la section 5.4.1. Le tableau 5.5 donne les performances en rapport de Strehl longue-pose à  $2,2\mu\text{m}$ .

TAB. 5.5 – Rapport de Strehl longue pose pour les commandes modale et zonale. Le FD-PCG-LQG utilise 8 itérations par trame. La résolution spatiale de la phase reconstruite est de  $0,5\text{m}^{-1}$ .

$\Sigma_\infty$ utilisée	rapport de Strehl longue pose (%)
(ii) Modélisation zonale avec $\Sigma^{-1}$ exacte	81.55
(iii) Modélisation zonale avec approximation creuse de $\Sigma^{-1}$	81.53
(iv) Modélisation zonale itérative FD-PCG-LQG	81.07

Une première observation est que la simulation avec la matrice  $\Sigma_\infty^{-1}$  approximée par la matrice creuse de l'Eq. (5.39) n'entraîne pas de pertes de performance pour les cas traités. Le gain de Kalman  $\mathcal{L}_\infty$  est quant à lui calculé explicitement avec l'approximation de  $\Sigma_\infty^{-1}$  proposée dans l'Eq. (5.39). Ceci est la première étape à franchir avant l'utilisation du FD-PCG-LQG.

Des systèmes d'OA allant de 8 à 20 sous-pupilles ont été testés, tous présentant des niveaux identiques de performance en comparaison avec le calcul explicite exacte du gain de Kalman, sous approche zonale. La simulation de systèmes de tailles supérieures nécessitait des moyens de calcul plus puissants.

Les simulations montrent, comme attendu, une légère perte de performance due aux approximations. La Fig. 5.13-gauche montre la variation en fonction de la magnitude de l'étoile guide. Pour une étoile de magnitude 12 la perte est inférieure à 0,5% en terme de rapport de Strehl avec des pertes légèrement plus importantes en faible flux : pour une magnitude de 14 la différence se chiffre plus précisément à 5% du niveau de Strehl de la solution sans approximations. Ces résultats confirment ceux déjà présentés dans [Correia *et al.*, 2009a].

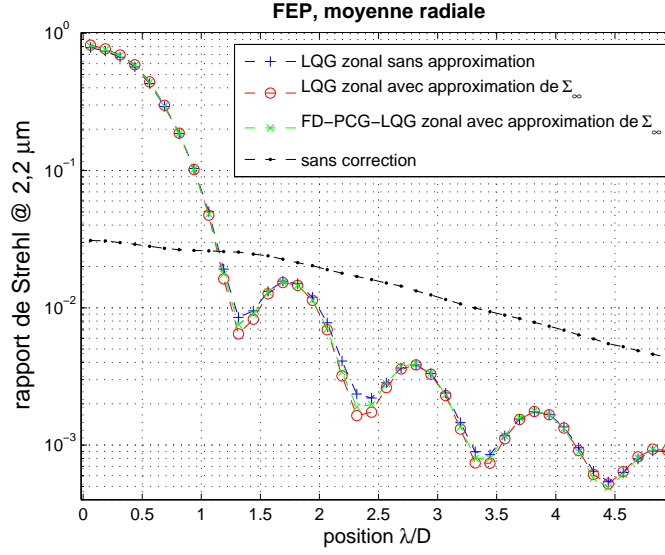


FIG. 5.12 – Moyenne radiale de la FEP. Commandes zonales avec  $\Sigma_\infty$  exacte, approximée et LQG itératif pré-conditionné en espace Fourier. Temps de simulation : 2s.

Il en va de même pour la FEP : l'approximation n'a donc quasiment pas d'impact sur la FEP. Une coupe radiale est présentée sur la Fig. 5.12. Avec l'approximation de  $\Sigma_\infty^{-1}$  par un opérateur spectral on aurait pu s'attendre à une sous- ou sur-régularisation qui aurait produit une rejection moins efficace sur une bande spécifique de fréquences. Ce possible inconvénient n'est donc pas soutenu par la structure de la FEP calculée.

### 5.8.2.1 Rapidité de convergence

Il est aussi fondamental de quantifier le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir des niveaux de performance concurrentiels. Avec une option d'initialisation consistant à prendre la dernière solution comme solution de départ pour le nouveau jeu de données<sup>8</sup>, environ 8 itérations sont requises pour garantir des niveaux de performances comparables aux deux premières lignes ( $\Sigma^{-1}$  exacte et  $\Sigma^{-1}$  approximée) du tableau 5.4. Or, ce nombre est plutôt élevé, du moins en comparaison avec ce que les simulations de [Yang *et al.*, 2006] l'aurait pu faire attendre. Dans leur cas, 3-4 itérations s'avèrent suffisantes.

La simulation du FD-PCG-LQG avec 5 itérations par trame conduit à des performances assez faibles en comparaison avec la performance obtenue avec 8 itération, qui permet une augmentation de 20% de rapport de Strehl. La Fig. 5.13-droite montre cet effet. On peut apprécier la différence

<sup>8</sup>Dénommée dans la littérature par *warm restart*.

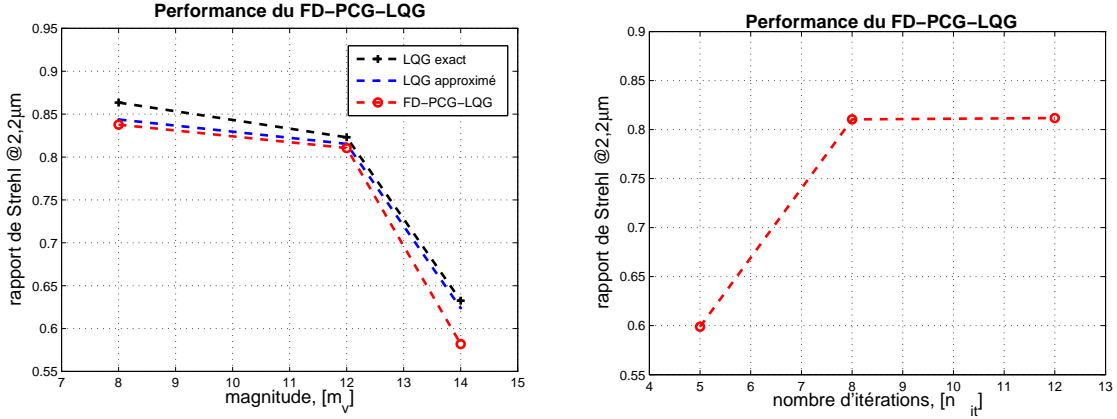


FIG. 5.13 – Performance du FD-PCG-LQG en fonction de la magnitude ou du nombre d'itérations.

de complexité entre 4 et 9 itérations sur la Fig. 5.9. L'idéal serait de converger plus rapidement en travaillant notamment sur le pré-conditionneur.

## 5.9 Extensions aux OA grand champ

La commande LQG présentée au chapitre 4 est issue des approches de [Le Roux, 2003] et [Petit, 2006]. La structure particulière du modèle d'état, notamment la présence d'occurrences de phase de la turbulence à la place d'occurrences de phase résiduelle, celle-ci uniquement définie sur la pupille et pas en altitude, a été à l'origine choisie pour pouvoir se généraliser aux OA grand champ. Cette formulation initiale proposée par [Le Roux, 2003] a été ensuite appliquée sur un banc optique par [Petit, 2006] en OA classique puis OA hors-axe et plus récemment appliquée par [Costille, 2009] sur un banc d'OA multi-conjuguée. Se référer à l'introduction au chapitre 4 pour une discussion plus élargie.

### 5.9.1 Complexité calculatoire

La complexité calculatoire des systèmes d'OA grand champ va croissant avec la complexité des systèmes eux-mêmes, c'est-à-dire, avec le nombre de directions d'analyse, de MD, de couches estimées, le nombre de modes par couche, la nature des mesures (NGS/LGS) et le nombre de directions d'intérêt.

Afin de simplifier la discussion, la complexité calculatoire pour un cas d'OAMC de référence, sous hypothèse que l'approche FD-PCG-LQG est généralisable à ce cas applicatif, est présentée sur la Fig. 5.14 où les expressions du tableau 5.2 sont utilisées ; trois directions d'analyse, deux altitudes de conjugaison et cinq couches estimées en altitude sont considérées en fonction du nombre de degrés de liberté.

Les gains apportés par l'application d'une commande LQG avec une implantation numérique optimisée du type proposé dans ce chapitre est d'environ deux ordres de grandeur. Ceci est un facteur non négligeable, d'autant plus que la complexité d'un système d'OAMC est ramenée quasiment à celle d'un système d'OA classique de taille ELT. Il reste bien-sûr à tester et valider en simulations réalistes les tendances énoncées.

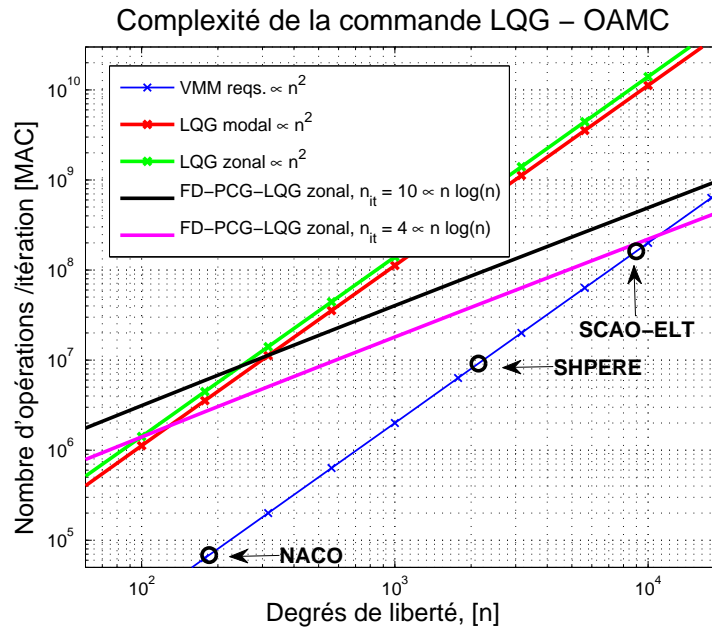


FIG. 5.14 – Complexité calculatoire de la commande LQG modale et zonale. Les coûts calculatoires de la nouvelle approche FD-PCG-LQG sont aussi tracés pour comparaison. Les lois appliquées sont détaillées dans le tableau 5.2. Deux DM, trois ASO et 5 couches estimées. Pour comparaison, la complexité obtenue pour des système d'OA classique est tracée dans le cas d'une commande intégrateur (VMM).



### 5.9.2 Le FD-PCG-LQG en OAMC

La question centrale consiste à savoir si les approximations que l'on propose pour appliquer la commande LQG en GNDL peuvent aussi être généralisées aux OA grand champ.

Pour répondre à cette question, on va s'appuyer sur la simulation d'un cas simple : simulation sous base de polynômes de Zernike avec trois directions d'analyse et deux couches estimées, où se trouvent conjugués les MD.

La commande LQG en systèmes tomographiques (qu'il s'agisse des OA asservies en boucle ouverte ou boucle fermée) fait intervenir la matrice d'erreur d'estimation  $\Sigma_\infty$  qui est composée, pour cet exemple particulier, de  $2 \times 2$  sous-blocs de taille  $n_\phi$ , où  $n_\phi$  est le nombre total de modes estimés dans chaque couche atmosphérique. Chaque sous-bloc représente la covariance d'erreur d'estimation pour une couche particulière.

Cette matrice associe par conséquent aux modes mal-vus un terme d'erreur élevé, car la difficulté du système à discerner l'origine de ce type de modes se reporte immédiatement sur la structure de  $\Sigma_\infty$ . Les modes de tip/tilt étant les plus énergétiques, on s'attend donc à ce que les valeurs de  $\Sigma_\infty$  associées au TT soient en effet d'amplitude plus importante. Pour une turbulence Kolmogorov ces deux modes concentrent environ 87% d'énergie [Noll, 1976]. La reconstruction est possible grâce à un fort *a priori* spatial sur la phase.

La Fig. 5.15 illustre ce principe. La matrice  $\Sigma_\infty$  a été calculée pour un système d'OA multi-conjuguée avec deux miroirs conjugués à  $\{0; 13,8\}$ Km et 3 ASO de sept sous-pupilles (linéaire) chacun. Sont reconstruits 60 modes dans la couche au sol et 120 en altitude. La variance d'erreur d'estimation sur le TT est en effet très élevée, d'à peu près deux ordres de grandeur plus élevée que les erreurs associées aux autres modes.

Les approches en pseudo-boucle-ouverte permettent précisément d'éviter l'utilisation d'une matrice de régularisation où des termes sont corrélés entre couches puisque la matrice  $\Sigma_\phi$  est diagonale par blocs, la phase étant supposée indépendante entre couches.

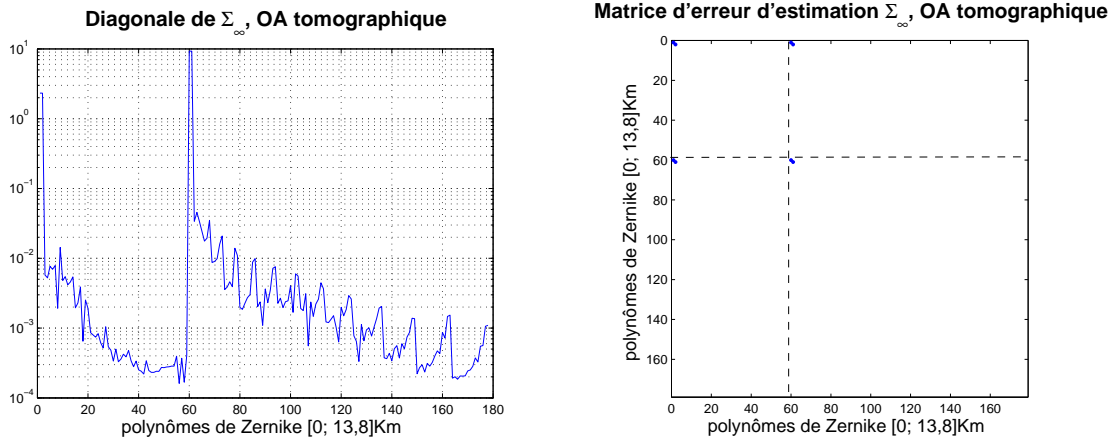


FIG. 5.15 – Gauche : diagonale de la matrice de covariance d'erreur pour une occurrence de phase. Modélisation avec une base de polynômes de Zernike. Trois ASO et deux MD conjugués des couches turbulentes au sol et à 13,8Km. Droite : matrice complète. Des corrélations sont visibles surtout sur les modes de TT. Simulation gentiment effectuée par A. Costille.

L'approche FD-PCG-LQG n'utilise pas une base de polynômes de Zernike mais plutôt une

approche zonale. Les *a priori* sont directement donnés dans l'espace de Fourier où les spectres de phase et de phase résiduelle sont relativement bien connus. Il y a donc une voie d'extension possible qu'il faudra tester. [Neichel *et al.*, 2009] montre la distribution des modes mal-vus en fonction de leur fréquence spatiale pour des OA grand champ. Poussant plus loin, les travaux de [Poyneer *et al.*, 2007] et [Poyneer *et al.*, 2009] suggèrent que dans l'espace de Fourier les modes sont décorrélés spatialement et temporellement. De ce fait, le pré-conditionnement et l'application de la matrice de régularisation pourrait s'effectuer de façon très similaire à ce qu'on propose à la section 5.4. Il s'agit d'une voie envisagée en perspective de ce travail.

La commande LQG s'applique aussi sans modification structurelle aux systèmes multi-objets. Pour ceux-ci la version présentée à la section 4.4.6 pour les OA boucle ouverte est alors utilisée. Le fait de travailler en boucle ouverte n'implique pas directement que la matrice de covariance de l'erreur soit diagonale par blocs, comme on pourrait le penser à première vue, ce qui implique que le cas précédent de l'OAMC est le cadre adéquat.

## 5.10 Bilan et ouverture

Ce chapitre propose une mise en œuvre de la commande optimale LQG pour les systèmes d'OA à grand nombre de degrés de liberté.

L'objectif de ce chapitre est de partir d'une loi de commande optimale pour l'adapter aux GNDL et non pas de considérer des lois sous optimales.

Dans l'approche proposée ici, dénommée FD-PCG-LQG, les multiplications vecteur-matrice, de loin les plus lourdes au niveau calculatoire, sont remplacées par des algorithmes itératifs du type gradients conjugués avec un pré-conditionneur défini dans l'espace de Fourier. L'efficacité calculatoire d'une méthode itérative étant très fortement liée à la densité d'éléments non nuls dans le système d'équations, on a proposé une approximation creuse de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation, intervenant dans la solution LQG générale. Cette approximation s'avère très bien ajustée aux cas testés. Les performances obtenues sont équivalentes à celles obtenues sans approximations. Une comparaison avec la commande LQG de référence modélisée sous une base de polynômes de Zernike a été menée. D'une part on constate que la modélisation avec une base zonale permettant d'obtenir des opérateurs creux, n'induit pas de pertes de performance, avec des conditionnements de matrices plus avantageux ; d'autre part le nouvel algorithme FD-PCG-LQG avec un nombre minimum de 8 itérations par trame atteint une performance quasi égale à celle de la méthode de référence, pour un système avec  $20 \times 20$  sous-pupilles (linéaire). Une analyse de robustesse vis-à-vis de la magnitude de l'étoile guide montre aussi que les performances restent compétitives, malgré des différences qui s'accroissent en faible flux.

Cet algorithme ouvre la possibilité de réduction considérable du nombre de calculs pour des systèmes de taille ELT. En perspective, une adaptation aux systèmes d'optique adaptative multi-conjuguée a aussi été proposée. Cependant la solution n'a pas été testée.

Une hypothèse sous-jacente à tous les développements effectués jusqu'ici dans ce mémoire est que le miroir est infiniment rapide. Or, cette hypothèse peut s'avérer très restrictive surtout pour les systèmes futurs. Le chapitre suivant se penche donc sur la généralisation de la solution LQG aux cas où la dynamique ne peut plus être négligée.



## **Chapitre 6**

# **Commande optimale en OA pour des miroirs à réponse non instantanée**

Où la commande à variance minimale de phase résiduelle est généralisée aux systèmes d'OA avec MD à dynamique non négligeable. La commande est ensuite illustrée sur les modes de tip/tilt du futur télescope géant Européen et sur le système « woofer-tweeter » de NFIRAOS.

---

**Sommaire**

<b>6.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>169</b>
<b>6.2</b>	<b>Commande LQG pour des MD à réponse non instantanée . . . . .</b>	<b>171</b>
6.2.1	Développement du critère d'optimisation continu . . . . .	171
6.2.2	Construction du modèle d'état pour la commande . . . . .	178
6.2.3	Évaluation de performance . . . . .	184
6.2.4	Régulateur optimal et régulateurs sous-optimaux . . . . .	186
<b>6.3</b>	<b>Le concept <i>woofer-tweeter</i> . . . . .</b>	<b>186</b>
6.3.1	Critère d'optimisation . . . . .	188
6.3.2	Modèle d'état étendu pour la commande . . . . .	190
<b>6.4</b>	<b>Modèles linéaires . . . . .</b>	<b>192</b>
6.4.1	La perturbation de phase . . . . .	192
6.4.2	Le miroir déformable . . . . .	193
<b>6.5</b>	<b>Outils d'évaluation : calculs analytiques, simulations Monte Carlo . . . . .</b>	<b>196</b>
6.5.1	Mise en œuvre du simulateur Monte Carlo . . . . .	197
<b>6.6</b>	<b>Calculs analytiques - correction des modes de basculement . . . . .</b>	<b>198</b>
6.6.1	Un cas simple : dynamiques du premier ordre . . . . .	198
6.6.2	Dynamiques du second ordre (perturbation et MD) . . . . .	201
<b>6.7</b>	<b>Aperçu général des résultats des articles soumis . . . . .</b>	<b>204</b>
<b>6.8</b>	<b>Le ELT Européen : dynamiques du second ordre . . . . .</b>	<b>204</b>
6.8.1	Simulation avec modèle de perturbation identifié . . . . .	204
6.8.2	Série temporelle indépendante du modèle . . . . .	205
<b>6.9</b>	<b>NFIRAOS, woofer-tweeter pour le TMT . . . . .</b>	<b>207</b>
<b>6.10</b>	<b>Bilan et discussion . . . . .</b>	<b>210</b>

---

## 6.1 Introduction

Ce chapitre définit le cadre du problème de commande optimale pour des systèmes d'OA constitués de MD dynamiques à réponse non instantanée. Ce sujet est la suite naturelle des chapitres précédents. Au chapitre 3, la reconstruction statique de front d'onde a été traitée dans le cadre d'un problème de régulation à action intégrale particulièrement adapté aux GNDL. Dans le chapitre 4 les bases d'une commande à variance minimale considérant des MD infiniment rapides ont été posées. Ce problème a été alors inscrit dans l'approche LQG et il a été montré que la commande optimale se réduit à la projection orthogonale de la phase moyenne prédite sur l'espace miroir. Des méthodes itératives ont été proposées et testées au chapitre 5 pour alléger un coût calculatoire accru, soit pour les calculs hors-ligne soit en temps-réel.

Toutes ces approches ont été mises en place sous l'hypothèse que la dynamique temporelle du MD est négligeable par rapport au temps d'intégration  $T_s$ . On relâche donc ici cette hypothèse.

Les télescopes de grande taille, en partie en raison des fortes perturbations auxquelles ils sont soumis<sup>1</sup>, emploient des MD pré-focaux de grande taille physique dans leur train optique [Hallibert *et al.*, 2006, Arsenault *et al.*, 2006, Gilmozzi et Spyromilio, 2008, Vernet *et al.*, 2008]. Ceci permet d'atténuer le résidu de perturbation total à corriger par les étages post-focaux. Dans ce cadre, les télescopes ne sont plus actifs, mais adaptatifs du fait que ces optiques s'adaptent aux conditions de perturbation qui évoluent en permanence.

Le peu d'études disponibles à l'heure actuelle (par exemple celles de [Riccardi *et al.*, 2004] et [Gasmi *et al.*, 2008]) montrent, pour des MD pré-focaux, des caractéristiques dynamiques dont l'impact sur la performance optique est potentiellement négatif mais encore méconnu. Cet impact n'a jamais non plus été évalué en employant des outils dédiés.

La détermination du régulateur optimal visant la minimisation un critère de performance à temps continu a été l'objet de plusieurs travaux de recherche, notamment ceux de [Paschall *et al.*, 1991] et [Paschall et Anderson, 1993] et, plus récemment, [Looze, 2007, Looze, 2009]. Les deux premiers, malgré l'utilisation de l'approche LQG, ne forment pas un problème à variance minimale. Les matrices de pondération du critère ont été choisies arbitrairement de façon garantir un résidu inférieur à  $\lambda/20$  rms pour chacun des 14 modes de Zernike utilisés pour la commande modale du système d'OA. Des pénalisations supplémentaires sont introduites lors de l'écriture du critère de minimisation afin de rester dans le régime linéaire et d'éviter des excursions trop élevées des actionneurs du MD. Malgré la formulation du problème avec une dynamique MD du premier ordre, le chronogramme d'opérations n'est pas pris en compte de façon explicite ou exacte. La formulation étant réalisée à temps continu, la discrétisation reste à justifier. Les travaux de Looze montrent quant à eux qu'à partir de modèles LIT de la perturbation et du MD, la solution, avec une pénalité additionnelle sur la commande, s'obtient comme solution d'un problème LQG. Cependant, à cause de la pénalité ajoutée, la solution n'est plus optimale vis-à-vis du critère continu initial, celui de la variance minimale de la phase résiduelle. Un aspect essentiel qui est négligé concerne la structure particulière du problème posé par l'OA, où se mêlent des modèles stochastiques de perturbation et modèles déterministes des actionneurs. Cet auteur prend comme point de départ la construction d'un régulateur linéaire par retour d'état. Ceci résulte en un état dont les composantes perdent leur sens physique, un aspect important pour l'analyse et compréhension du problème et de sa solution. Les effets des retards et du bruit de mesure ne sont pas séparés ni évalués aisément.

<sup>1</sup>Aussi et surtout parce que le nombre de surfaces réfléchissantes a été réduit pour des observations dans l'infra-rouge proche [Kendrew *et al.*, 2007].

L'objectif de ce chapitre est donc de traiter le cas général de commande optimale, au sens de la variance minimale de la phase résiduelle, pour des miroirs déformables à dynamique non négligeable, et ce dans le cadre de l'approche LQG présentée au chapitre 4. Cette approche vise à définir un problème bien posé de commande optimale en explorant le caractère stochastique et déterministe des espaces distincts spécifique à l'OA lorsque les miroirs déformables sont à réponse non instantanée.

La solution du problème de minimisation du critère de variance minimale<sup>2</sup> de phase résiduelle est présentée suivie de l'évaluation de la performance optique face à des perturbations d'origine atmosphérique et mécanique (auxquelles les ELT sont particulièrement exposés).

Tout d'abord, un point important à souligner : traiter la dynamique des MD au niveau de la boucle de commande d'OA (du moins jusqu'à une certaine extension et sous conditions) permet de relaxer les contraintes imposées aux fabricants de MD, ce qui conduit à des développements techniques moins exigeants. Cela va de paire avec une réduction de la complexité et donc des coûts et temps de fabrication, sans doute un aspect favorable.

Les travaux de [Correia *et al.*, 2008b, Correia *et al.*, 2009b] forment un problème de commande modale entièrement à temps discret à partir du problème hybride temps continu/temps discret. Les statistiques suffisantes sont définies et l'équivalence au critère continu démontrée. Les résultats ont été ensuite illustrés pour une dynamique du premier ordre.

On se place donc ici dans un cadre de commande modale. Ce choix est motivé par la simplification et réduction de complexité du problème suggérée par la ressemblance entre les modes propres des MD et les bas-ordres des aberrations optiques les plus communes, tels que basculements, défocus, astigmatismes.

Comme précédemment, la séparation des formes en information complète et incomplète reste valable. La solution est, par conséquent, obtenue en deux temps, consistant à résoudre 1) un problème déterministe de commande optimale puis 2) un problème d'estimation optimale. De façon séquentielle, en partant de la définition du critère continu de variance de phase résiduelle minimale, on commence par le développer puis identifier de la « sortie-critère » à la section 6.2.1. L'obtention de cette sortie à partir d'un modèle d'état discret est réalisée à la section 6.2.2. Ensuite la performance est évaluée analytiquement à la section 6.2.3 en adaptant la méthode décrite à la section 4.4.5.

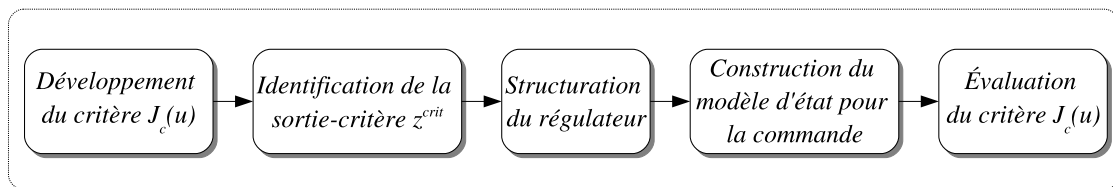


FIG. 6.1 – Étapes de la détermination de la commande optimale par approche LQG, de la définition du critère d'optimisation à l'évaluation de performance.

Contrairement à la solution formulée pour la commande LQG avec MD infiniment rapides, où la commande optimale consistait juste en une projection orthogonale sur l'espace miroir, le cas traité ici n'admet pas de solution aussi simple. La solution est en effet obtenue en résolvant une équation

<sup>2</sup>Pour rappel, le critère de variance minimale de phase résiduelle est spécialement attractif en OA puisque le rapport de Strehl est ainsi maximisé [Herrmann, 1992].

de Riccati, comme montré à la section 6.2.4. Avec ces développements, le concept *woofer-tweeter* [Brennan et Rhoadarmer, 2006], consistant à employer deux miroirs pour faire la correction, avec des dynamiques temporelles et des caractéristiques spatiales distinctes, est traité de façon aisée, la solution établie étant généralisable aussi à ce type de systèmes, d'ailleurs très en vogue en OA des ELT.

Afin d'évaluer les performances par d'autres moyens que le code analytique, un simulateur Monte Carlo du système complet en boucle fermée est mis en œuvre. Dans un premier temps, sans erreurs de modèle, ce simulateur permet de retrouver les résultats analytiques. Pour cela, les modèles de perturbation et du MD pris pour la synthèse de la commande LQG sont conformes à ceux pris pour la simulation du système d'OA. C'est le cas cohérent. Ce simulateur est aussi utilisé dans le cas dit incohérent, où des séries temporelles de perturbation issues de simulations indépendantes sont utilisées en entrée. Évidemment, les modèles pris pour la résolution du problème de commande ne sont pas les mêmes, mais identifiés à partir des données disponibles.

Enfin, une application au système M4 de l'E-ELT [Gilmozzi et Spyromilio, 2008] et au système *woofer-tweeter* de NFIRAOS [Herriot et al., 2005, Herriot et al., 2006] sera présenté en fin de chapitre ayant pour objectif de montrer la pertinence de l'approche et les avantages de la solution optimale par rapport à une approche négligeant la dynamique du MD. Étant donné que les résultats se concentrent, pour ces cas d'application, sur la correction des modes de TT, la problématique des GNDL ne se pose pas à ce stade.

## 6.2 Commande LQG pour des MD à réponse non instantanée

Dans le cas général où la réponse transitoire du MD est non négligeable, c'est-à-dire, pour les systèmes à réponse non instantanée, la synthèse du régulateur optimal s'appuie sur un modèle d'évolution temporelle de la surface réflectrice du MD. Autrement dit, un modèle dynamique du MD. Le critère discret équivalent inclut alors des états additionnels liés à la perturbation de phase (qu'elle soit d'origine atmosphérique ou pas) et au modèle dynamique du MD. La synthèse de la commande à VM devient alors un problème dont la solution ne peut pas être déterminée indépendamment du modèle de perturbation, contrairement à la solution trouvée pour des MD infiniment rapides au chapitre 4. Les différentes étapes de l'approche LQG suivie ici sont résumées par la Fig. 6.1.

### 6.2.1 Développement du critère d'optimisation continu

Le critère d'optimisation continu est, comme auparavant au chapitre 4, défini comme étant la variance minimale de phase résiduelle. Soit pour rappel

$$J^c(u) \triangleq \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \|\phi^{\text{res}}(t)\|^2 dt \quad \text{Critère d'optimisation continu} \quad (6.1)$$

où  $\|\phi^{\text{res}}(t)\|^2 = \|\phi^{\text{tur}}(t) - \phi^{\text{cor}}(t)\|^2$ . Le découpage en coûts incrémentaux  $J^c(u)_k$  sur une période d'échantillonnage  $T_s$ ,

$$J^c(u)_k \triangleq \frac{1}{T_s} \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} \|\phi^{\text{tur}}(t) - \phi^{\text{cor}}(t)\|^2 dt, \quad (6.2)$$

donné à l'Eq. (4.62), est aussi utilisé dans la suite pour la présentation de la solution LQG, sachant que

$$J^c(u) = \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{M} \sum_{k=0}^M J^c(u)_k. \quad (6.3)$$



On va montrer que le critère à temps continu  $J^c(u)$  s'exprime comme la somme de deux composantes dont une seule dépend de la commande  $u \in \mathcal{U}$

$$J^c(u) = J_{\text{tur}} + J_{\text{dyn}}^d(u). \quad (6.4)$$

Une forme comparable avait déjà été trouvée à la section 4.4, où le critère continu était alors la somme de deux composantes : le critère discret équivalent et l'erreur ultime.

Pour le cas présent, toutefois, les deux termes de l'Eq. (6.4) ont des interprétations différentes. Le terme  $J_{\text{tur}}$  regroupe tous les termes indépendants de  $u$ , dont font partie différentes composantes. Le critère équivalent discret  $J_{\text{dyn}}^d(u)$  est le résultat d'une modification pour se présenter sous la forme

$$J_{\text{dyn}}^d(u) = \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \left( (z_k^{\text{crit}})^T Q z_k^{\text{crit}} + u_k^T R u_k + 2 (z_k^{\text{crit}})^T S u_k \right), \quad \text{Critère discret équivalent} \quad (6.5)$$

où  $Q - S R^{-1} S^T \geq 0$ , et  $R = R^T > 0$ . Le développement naturel de l'Eq. (6.1) fait apparaître une forme à temps discret non quadratique. Le critère  $J_{\text{dyn}}^d(u)$  est donc un critère discret tenant compte de la présence d'un MD avec dynamique, garantissant l'unicité de la solution.

Sachant que l'addition et/ou la soustraction de termes indépendants de la commande  $u$  ne modifie pas l'identité

$$\arg \min_{u \in \mathcal{U}} J^c(u) = \arg \min_{u \in \mathcal{U}} J_{\text{dyn}}^d(u), \quad (6.6)$$

alors le régulateur synthétisé à partir du critère discret  $J_{\text{dyn}}^d(u)$  est rigoureusement égal à celui que l'on obtiendrait en minimisant directement le critère continu de départ  $J^c(u)$ .

### Hypothèse 6.1 *Modèle dynamique de déformation du MD.*

*Soit la phase de correction produite par le miroir déformable*

$$\phi^{\text{cor}} \triangleq N p(t), \quad \text{Phase de correction du MD} \quad (6.7)$$

où  $p(t)$  est la déformation instantanée du MD dans une base de fonctions d'influence normalisées. Cette hypothèse sous-entend que, même en présence de dynamique, l'espace engendré par le MD est restreint à  $\text{Im}(N)$  – l'espace de phase engendré par les fonctions d'influence du MD mesurées en régime statique.

Par ailleurs, la déformation instantanée du MD est donnée par un système dynamique à temps continu, LIT, de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}^m(t) &= \mathcal{A}_m x^m(t) + \mathcal{B}_m u(t) \\ p(t) &= \mathcal{C}_m x^m(t) + \mathcal{D}_m u(t) \end{cases} \quad \text{Déformation instantanée du MD} \quad (6.8)$$

sous les conditions : (a.)  $\mathcal{A}_m$  est une matrice de stabilité (toutes ses valeurs propres sont à partie réelle négative) avec  $\dim(\mathcal{A}_m) < \infty$ ; (b.) Le couple  $(\mathcal{A}_m, \mathcal{C}_m)$  est observable et (c.) le gain statique entre  $u$  et  $p$  existe et est inversible. Sans introduire de restriction supplémentaire, on suppose ce gain statique unitaire, i.e.  $\mathcal{D}_m - \mathcal{C}_m \mathcal{A}_m^{-1} \mathcal{B}_m = \text{I}$ . En pratique, ceci signifie que la matrice d'influence du miroir, telle qu'obtenue par la procédure habituelle consistant à appliquer successivement un échelon de tension sur chacune des coordonnées de  $u$  et à mesurer la forme finale réalisée par le MD, est de rang plein et égal à la dimension de  $u$ .  $\blacktriangle$

**Remarques :** La classe de modèles proposée inclut en particulier les modèles fondés sur les modes propres du MD. Si l'espace engendré par le MD n'est pas restreint à  $\text{Im}(\mathbf{N})$ , ceci obligerait alors à l'utilisation d'une matrice  $\mathbf{N}^*$  généralisée auquel cas l'espace engendré par les fonctions d'influence  $\mathcal{M}$  serait complété par une composante additionnelle due au comportement dynamique du MD. Cette variante, certes plus générale, ne sera pas traitée dans ce mémoire. ◀

Sous l'hypothèse 6.1, le développement de la forme quadratique dans l'Eq. (6.1) sur un intervalle de durée  $T_s$ , à l'aide de l'Eq. (6.7), conduit à

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_s} \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} \|\phi^{\text{res}}(t)\|^2 dt &= \frac{1}{T_s} \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} \|\phi^{\text{tur}}(t) - \phi^{\text{cor}}(t)\|^2 dt \\ &= \frac{1}{T_s} \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} \left( \phi^{\text{tur}}(t)^\top \phi^{\text{tur}}(t) + p(t)^\top \mathbf{N}^\top \mathbf{N} p(t) - 2\phi^{\text{tur}}(t)^\top \mathbf{N} p(t) \right) dt. \end{aligned} \quad (6.9)$$

où  $p(t)$  est défini par la propriété 6.1.

**Propriété 6.1 Déformation instantanée du MD.**

La déformation instantanée  $p(t)$  du système défini par l'Eq. (6.8) est, d'après le lemme 4.1, exprimée par

$$p(t) = \mathcal{C}_m e^{s\mathcal{A}_m} x^m(0) + \int_0^t \mathcal{C}_m e^{(t-v)\mathcal{A}_m} \mathcal{B}_m u(v) dv + \mathcal{D}_m u(t). \quad (6.10)$$

Pour une commande constante appliquée par un bloqueur d'ordre zéro du type  $u(t) = u_k$ ,  $t \in [kT_s, (k+1)T_s]$ , la discrétisation exacte de  $p(t)$ , à partir de l'Eq. (6.10), est donnée par [Söderström, 2002]

$$p(t) = \mathcal{C}_m e^{(t-kT_s)\mathcal{A}_m} x_k^m + \left( \mathcal{D}_m - \mathcal{C}_m \mathcal{A}_m^{-1} \mathcal{B}_m + \mathcal{C}_m e^{(t-kT_s)\mathcal{A}_m} \mathcal{A}_m^{-1} \mathcal{B}_m \right) u_k. \quad (6.11)$$

△

En intégrant l'Eq. (6.9) avec  $p(t)$  défini par l'Eq. (6.10) on est amené à la proposition suivante.

**Proposition 6.1** Trois composantes sont requises pour déterminer  $J_{\text{dyn}}^d(u)$ . Elles sont regroupées dans un nouveau vecteur de sorties, nommé sortie-critère défini par

$$z_k^{\text{crit}} \triangleq \begin{pmatrix} \bar{\phi}_{k+1}^{\text{tur}} \\ \bar{\varphi}_{k+1}^{\text{tur}} \\ x_k^m \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} \phi^{\text{tur}}(kT_s + s) ds \\ \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} e^{s\mathcal{A}_m^\top} \mathcal{C}_m^\top \mathbf{N}^\top \phi^{\text{tur}}(kT_s + s) ds \\ x^m(kT_s) \end{pmatrix}, \quad \text{Sortie-critère} \quad (6.12)$$

dont les composantes de  $z_k^{\text{crit}}$  correspondent à :

- $\bar{\phi}_{k+1}^{\text{tur}}$  : phase moyenne sur la période suivante à l'application de la commande  $u_k$  ;
- $\bar{\varphi}_{k+1}^{\text{tur}}$  : moyenne de la phase pondérée par la réponse indicielle du MD ;
- $x_k^m$  : état interne du MD donné à l'Eq. (6.8) discrétisé à l'instant  $t = kT_s$ .

Il est ainsi possible de définir le régulateur optimal qui minimise  $J^c(u)$  en travaillant entièrement à temps discret.

Les matrices de pondération de l'approche LQ sont quant à elles définies par

$$Q \triangleq \begin{pmatrix} \frac{2}{\varepsilon} \mathbf{N} \mathbf{N}^T & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} (\mathbf{I} + 2 \mathcal{B}_m^T \mathcal{A}_m^{-T} \mathcal{A}_m^{-1} \mathcal{B}_m) & -\mathbf{I} \\ 0 & -\mathbf{I} & Q_0 \end{pmatrix} \geq 0, \quad (6.13)$$

$$S \triangleq \begin{pmatrix} -\mathbf{N} \\ -\mathcal{A}_m^{-1} \mathcal{B}_m \\ S_0 \end{pmatrix}, \quad R = R_0, \quad (6.14)$$

avec  $Q_0$ ,  $S_0$  et  $R_0$  définies par

$$Q_0 \triangleq \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} e^{s \mathcal{A}_m^T} \mathcal{C}_m^T \mathbf{N}^T \mathbf{N} \mathcal{C}_m e^{s \mathcal{A}_m} ds, \quad (6.15a)$$

$$S_0 \triangleq \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} e^{s \mathcal{A}_m^T} \mathcal{C}_m^T \mathbf{N}^T \mathbf{N} (\mathbf{I} + \mathcal{C}_m e^{s \mathcal{A}_m} \mathcal{A}_m^{-1} \mathcal{B}_m) ds \quad (6.15b)$$

$$R_0 \triangleq \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} (\mathbf{I} + \mathcal{C}_m e^{s \mathcal{A}_m} \mathcal{A}_m^{-1} \mathcal{B}_m)^T \mathbf{N}^T \mathbf{N} (\mathbf{I} + \mathcal{C}_m e^{s \mathcal{A}_m} \mathcal{A}_m^{-1} \mathcal{B}_m) ds. \quad (6.15c)$$

Les intégrales de ces formes quadratiques sont calculées selon la procédure détaillée au lemme 8.7.  $\triangle$

#### Remarques :

1. Les trois composantes de  $z^{\text{crit}}$  résultent directement du développement de l'Eq. (6.9) : un terme faisant intervenir  $\bar{\phi}_{k+1}^{\text{tur}}$ , un autre avec  $x_k^m$  et enfin un troisième croisé.
2. Dans l'Eq. (6.13),  $\varepsilon > 0$  est une constante arbitraire qui n'affecte que des termes indépendants de  $u$  pour rendre la matrice  $P$  de l'Eq. (4.72) définie positive. Autrement dit, cela vise à garantir que le problème LQ est bien posé.
3. [Raynaud et al., 2010] montre que le résultat obtenu pour les miroirs infiniment rapides se déduit de cette solution comme un cas limite.  $\blacktriangleleft$

La démonstration de la proposition 6.1 est présentée comme suit : 1) développement du critère continu de départ et 2) identification des diverses composantes du critère ainsi obtenu, à savoir des termes dépendants et indépendants de la commande.

Pour résumer le critère  $J^c(u)$  se décompose en une partie continue indépendante de  $u$  et une partie à temps discret qui n'est pas une forme quadratique, notée  $J_i^d(u)$ . Celle-ci doit donc être modifiée pour réécrire  $J^c(u)$  comme la somme de deux termes  $J_{\text{tur}}$  et  $J_{\text{dyn}}^d$  où  $J_{\text{tur}}$  est indépendant de  $u$  et  $J_{\text{dyn}}^d$  est une forme quadratique à temps discret. La solution LQ requiert de plus la construction d'un modèle d'état avec lequel on puisse obtenir la sortie-critère de l'Eq. (6.12) et ainsi évaluer la performance de la solution établie. Ceci fait l'objet des sections 6.2.2 et 6.2.3. A partir d'un tel modèle d'état, orienté commande, le régulateur optimal sera déterminé.

#### Démonstration : Développement du critère $J^c(u)$ pour l'obtention du critère à temps discret $J_i^d$ .

Soit  $F$  la matrice de transfert entre  $u$  et  $p$ , i.e.  $F(s) = \mathcal{C}_m (s\mathbf{I} - \mathcal{A}_m)^{-1} \mathcal{B}_m + \mathcal{D}_m$ . Étant donné le système défini par l'Eq. (6.8) et les conditions associées,  $F(0) = \mathcal{D}_m - \mathcal{C}_m \mathcal{A}_m^{-1} \mathcal{B}_m = \mathbf{I}$ . Avec ceci l'Eq. (6.11) devient

$$p(kT_s + s) = \mathcal{C}_m e^{s \mathcal{A}_m} x_k^m + (\mathbf{I} + \mathcal{C}_m e^{s \mathcal{A}_m} \mathcal{A}_m^{-1} \mathcal{B}_m) u_k. \quad (6.16)$$

Ceci permet de réécrire le second terme du membre de droite dans l'Eq. (6.9) sous la forme

$$\begin{aligned}
 p(kT_s + s)^T N^T N p(kT_s + s) &= [\mathcal{C}_m e^{s\mathcal{A}_m} x_k^m + (\mathbf{I} + \mathcal{C}_m e^{s\mathcal{A}_m} \mathcal{A}_m^{-1} \mathcal{B}_m) u_k]^T N^T N \\
 &\quad \times [\mathcal{C}_m e^{s\mathcal{A}_m} x_k^m + (\mathbf{I} + \mathcal{C}_m e^{s\mathcal{A}_m} \mathcal{A}_m^{-1} \mathcal{B}_m) u_k] \\
 &= x_k^{m,T} \left( e^{s\mathcal{A}_m^T} \mathcal{C}_m^T N^T N \mathcal{C}_m e^{s\mathcal{A}_m} \right) x_k^m \\
 &\quad + 2x_k^{m,T} \left[ e^{s\mathcal{A}_m^T} \mathcal{C}_m^T N^T N (\mathbf{I} + \mathcal{C}_m e^{s\mathcal{A}_m} \mathcal{A}_m^{-1} \mathcal{B}_m) \right] u_k \\
 &\quad + u_k^T \left[ (\mathbf{I} + \mathcal{C}_m e^{s\mathcal{A}_m} \mathcal{A}_m^{-1} \mathcal{B}_m)^T N^T N (\mathbf{I} + \mathcal{C}_m e^{s\mathcal{A}_m} \mathcal{A}_m^{-1} \mathcal{B}_m) \right] u_k.
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

En intégrant sur  $t \in [kT_s, (k+1)T_s]$ , il vient

$$\frac{1}{T_s} \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} p(t)^T N^T N p(t) dt = (x_k^m)^T Q_0 x_k^m + 2(x_k^m)^T S_0 u_k + u_k^T R_0 u_k, \tag{6.18}$$

avec  $Q_0$ ,  $S_0$  et  $R_0$  définis par l'Eq. (6.15).

De même, pour le terme plus à droite de l'Eq. (6.9),

$$\begin{aligned}
 \phi^{\text{tur}}(kT_s + s)^T N p(kT_s + s) &= \phi^{\text{tur}}(kT_s + s)^T N [\mathcal{C}_m e^{s\mathcal{A}_m} x_k^m + (\mathbf{I} + \mathcal{C}_m e^{s\mathcal{A}_m} \mathcal{A}_m^{-1} \mathcal{B}_m) u_k] \\
 &= \phi^{\text{tur}}(kT_s + s)^T N \mathcal{C}_m e^{s\mathcal{A}_m} (x_k^m + \mathcal{A}_m^{-1} \mathcal{B}_m u_k) + \phi^{\text{tur}}(kT_s + s)^T N u_k.
 \end{aligned} \tag{6.19}$$

En intégrant sur  $t \in [kT_s, (k+1)T_s]$ , on obtient

$$\frac{1}{T_s} \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} p(t)^T N^T \phi^{\text{tur}}(t) dt = u_k^T N^T \bar{\phi}_{k+1}^{\text{tur}} + (x_k^m + \mathcal{A}_m^{-1} \mathcal{B}_m u_k)^T \bar{\varphi}_{k+1}^{\text{tur}}, \tag{6.20}$$

où

$$\bar{\phi}_{k+1}^{\text{tur}} = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} \phi^{\text{tur}}(kT_s + s) ds, \tag{6.21}$$

est la phase moyenne sur un intervalle de durée  $T_s$  et

$$\bar{\varphi}_{k+1}^{\text{tur}} = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} e^{s\mathcal{A}_m^T} \mathcal{C}_m^T N^T \phi^{\text{tur}}(kT_s + s) ds, \tag{6.22}$$

est le terme résultant du produit croisé du développement du critère quadratique.

Ceci conclut la première partie de la démonstration. ■

L'équation. (6.1) peut donc être écrite comme la somme de deux composantes (distinctes de celles de l'Eq. (6.4)) :

$$J^c(u) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \|\phi^{\text{tur}}(t)\|^2 dt + J_i^d(u) \tag{6.23}$$

où

$$J_i^d(u) \triangleq \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{M} \sum_{k=0}^M (z_k^{\text{crit}})^T Q_i x_k + 2(z_k^{\text{crit}})^T S u_k + u_k^T R u_k, \tag{6.24}$$

avec

$$Q_i \triangleq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I \\ 0 & -I & Q_0 \end{pmatrix}, \quad S \triangleq \begin{pmatrix} -N \\ -\mathcal{A}_m^{-1} \mathcal{B}_m \\ S_0 \end{pmatrix}, \quad R \triangleq R_0 > 0. \quad (6.25)$$

Le critère  $J_i^d(u)$  est celui qui sera utilisé lors de l'évaluation de  $J^c(u)$ , pour des raisons de simplicité de calcul.

La concaténation dans une matrice  $P_i$ , qu'on appelle la matrice de pondération du critère incomplet

$$P_i \triangleq \begin{pmatrix} Q_i & S \\ S^\top & R \end{pmatrix} \not\geq 0, \quad (6.26)$$

n'est pas définie positive : sous cette forme, les conditions suffisantes pour garantir l'unicité de la solution à ce problème ne sont pas réunies.

L'indice  $i$  indique que ce critère, ne définissant pas une forme quadratique, est considéré *incomplet*. Néanmoins, cette incomplétude n'empêche pas que ce critère soit utilisé pour l'évaluation de performance.

La valeur du coût incrémental associé à  $J_i^d(u)$  s'écrit sous forme matricielle,

$$J_i^d(u)_k = \begin{pmatrix} \bar{\phi}_{k+1}^{\text{tur}} \\ \bar{\varphi}_{k+1}^{\text{tur}} \\ x_k^m \\ u_k \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} Q_i & S \\ S^\top & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\phi}_{k+1}^{\text{tur}} \\ \bar{\varphi}_{k+1}^{\text{tur}} \\ x_k^m \\ u_k \end{pmatrix}. \quad (6.27)$$

Puisque le critère défini par l'Eq. (6.24) n'est pas une forme quadratique, une condition suffisante pour garantir l'unicité de la solution LQG, des termes de pondération additionnels sont associés aux composantes de l'état indépendants de la commande  $u$  (dans la partie supérieure gauche de la matrice  $P_i$ , soit donc  $Q_i$ ) pour que la positivité soit vérifiée. Les termes rajoutés sont ensuite enlevés avant le calcul final de performance.

**Propriété 6.2** *Critère discret équivalent.*

$\exists \varepsilon > 0$  tel que

$$Q \triangleq Q_i + Q_\varepsilon \triangleq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I \\ 0 & -I & Q_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{\varepsilon} \mathbf{N} \mathbf{N}^\top & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} (I + 2\mathcal{B}_m^\top \mathcal{A}_m^{-\top} \mathcal{A}_m^{-1} \mathcal{B}_m) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0, \quad (6.28)$$

conduise à

$$P \triangleq \begin{pmatrix} Q & S \\ S^\top & R \end{pmatrix} \geq 0. \quad (6.29)$$

△

En partant de la propriété 6.2, le critère donné par l'Eq. (6.2) devient par conséquent

$$\begin{aligned}
 J^c(u)_k &= \frac{1}{T_s} \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} \|\phi^{\text{res}}(t)\|^2 dt \\
 &= \frac{1}{T_s} \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} \|\phi^{\text{tur}}(t)\|^2 dt + J_i^d(u)_k \\
 &= \frac{1}{T_s} \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} \|\phi^{\text{tur}}(t)\|^2 dt + \begin{pmatrix} \bar{\phi}_{k+1}^{\text{tur}} \\ \bar{\varphi}_{k+1}^{\text{tur}} \\ x_k^m \\ u_k \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Q_i & S \\ S^T & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\phi}_{k+1}^{\text{tur}} \\ \bar{\varphi}_{k+1}^{\text{tur}} \\ x_k^m \\ u_k \end{pmatrix} \\
 &= \underbrace{\frac{1}{T_s} \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} \|\phi^{\text{tur}}(t)\|^2 dt + J_\varepsilon(u)_k}_{J_{\text{tur}}(u)_k} + \underbrace{\begin{pmatrix} z^{\text{crit}} \\ u_k \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^{\text{crit}} \\ u_k \end{pmatrix}}_{J_{\text{dyn}}^d(u)_k}. \quad (6.30)
 \end{aligned}$$

où, par analogie avec les Eqs. (6.2) et (6.5),  $J_{\text{tur}}(u)_k$  est le coût élémentaire de  $J_{\text{tur}}$  tandis que  $J_{\text{dyn}}^d(u)_k$  est associé à  $J_{\text{dyn}}^d$ . Celui-ci définit bien une forme quadratique, condition essentielle à la résolution du problème de commande à variance minimale. Après des manipulations algébriques élémentaires, il vient

$$J_{\text{tur}} = E \{ \|\phi^{\text{tur}}(t)\|^2 \} + E \{ J_\varepsilon(u)_k \}, \quad (6.31)$$

où

$$E \{ \|\phi^{\text{tur}}(t)\|^2 \} = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \|\phi^{\text{tur}}(t)\|^2 dt, \quad (6.32)$$

et

$$J_\varepsilon(u)_k = \begin{pmatrix} z^{\text{crit}} \\ u_k \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Q_\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^{\text{crit}} \\ u_k \end{pmatrix}, \quad (6.33)$$

Il reste

$$J_{\text{dyn}}^d(u)_k = \begin{pmatrix} z^{\text{crit}} \\ u_k \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^{\text{crit}} \\ u_k \end{pmatrix}. \quad (6.34)$$

La composante  $J_\varepsilon(u)_k$  ne correspond donc à rien d'autre qu'à la contribution apportée par les termes rajoutés à la matrice  $Q$  par l'inclusion de  $Q_\varepsilon$  dans l'Eq. (6.28) afin que la positivité de  $P$  dans l'Eq. (6.29) soit assurée. L'espérance de l'Eq. (6.30) est ainsi, presque sûrement égale à l'Eq. (6.4).

**Démonstration : Positivité du critère discret équivalent  $J_{\text{dyn}}^d(u)$ .**

Puisque l'Eq. (6.18) est par construction positive ou nulle (il s'agit en effet de l'intégrale d'une forme non négative), il en va de même de la forme quadratique associée :

$$P_0 \triangleq \begin{pmatrix} Q_0 & S_0 \\ S_0^T & R_0 \end{pmatrix} \geq 0. \quad (6.35)$$

Supposons que (6.18) soit nulle pour  $(x_k^m, u_k)$ . Puisque  $N^T N$  est inversible et  $p(t)$  est une fonction continue sur l'intervalle  $[kT_s, (k+1)T_s[$  (en tant que sortie d'un modèle continu avec entrée constante), il en découle que  $p(t)$  et toutes ses dérivées à droite en  $t = kT_s$  doivent être nécessairement nulles. Autrement dit,

$$p_k = p(kT_s) = C_m x_k^m + D_m u_k = 0, \quad (6.36)$$

$$\forall i > 0, \frac{d^i p}{dt^i} (kT_s)^+ = C_m \mathcal{A}_m^i x_k^m + C_m \mathcal{A}_m^{i-1} \mathcal{B}_m u_k = 0. \quad (6.37)$$

Cette dernière identité montre que  $\forall i > 0, \mathcal{A}_m x_k^m + \mathcal{B}_m u_k \in \ker(C_m \mathcal{A}_m^i)$ , ce qui équivaut à dire que  $\mathcal{A}_m x_k^m + \mathcal{B}_m u_k$  est une condition initiale non observable de  $(\mathcal{A}_m, C_m)$ . Puisque  $(\mathcal{A}_m, C_m)$  est observable,  $\mathcal{A}_m x_k^m + \mathcal{B}_m u_k = 0$ , ceci implique que  $(x_k^m, u_k)$  est un point d'équilibre de l'Eq. (6.8). Sous l'hypothèse que le gain entre  $u$  et  $p$  est unitaire, pour ce point d'équilibre  $C_m x_k^m + D_m u_k = 0$  et  $u_k = 0$ . Il en résulte d'abord que  $x_k^m$  est une condition initiale inobservable pour  $(\mathcal{A}_m, C_m)$ , et finalement que  $(x_k^m, u_k) = 0$ , ce qui contredit l'hypothèse de départ. Donc  $P_0 > 0$ .

Puisque  $P_0 > 0$ , on peut trouver une constante  $\varepsilon > 0$  telle que  $P_0 > \varepsilon I$ . En utilisant le complément de Schur et le lemme 8.3, avec des manipulations élémentaires de matrices, on vérifie que  $P \geq 0$ . Ceci conclut la démonstration. ■

### 6.2.2 Construction du modèle d'état pour la commande

En suivant la même démarche qu'au chapitre 4, la solution en information complète est traitée en premier, puisque cela résout le problème déterministe d'obtention du gain de commande optimale. Cette construction s'appuie sur l'hypothèse suivante :

#### Hypothèse 6.2 *Modèle dynamique perturbation de phase.*

*La perturbation (atmosphérique ou autre) peut être obtenue comme sortie d'un modèle linéaire stochastique et invariant dans le temps (LIT), de la forme*

$$\begin{cases} \dot{x}_{\text{tur}}(t) = \mathcal{A}_{\text{tur}} x_{\text{tur}}(t) + \eta(t) \\ \phi_{\text{tur}}(t) = \mathcal{C}_{\text{tur}} x_{\text{tur}}(t) \end{cases}, \quad \text{Modèle d'évolution de perturbation} \quad (6.38)$$

où l'entrée  $\eta(t)$  est un bruit blanc gaussien de de spectre  $\Sigma_\eta$ . ▲

La proposition 6.1 permet de ramener la détermination de la commande optimale à un problème de synthèse LQG standard, avec une solution unique et constructible. Plus précisément, avec la sortie-critère de l'Eq. (6.12) et les matrices de pondération LQ de l'Eq. (4.72), le régulateur optimal minimisant le critère équivalent à temps discret  $J_{dyn}^d(u)$  dans l'Eq. (6.4) sera déterminé et ensuite la valeur du critère quantifiée.

Sous l'hypothèse 6.2, on pourra définir le système dynamique standard à temps discret

$$\begin{cases} x_{k+1} = \mathcal{A}_d x_k + \mathcal{B}_d u_k + \Gamma_d v_k \\ z_k = \mathcal{C}_d x_k + \mathcal{D}_d u_k + w_k \\ z_k^{\text{crit}} = \mathcal{C}^{\text{crit}} x_k \end{cases}, \quad \text{Modèle d'état pour la commande} \quad (6.39)$$

où l'état  $x_k$  contient, entre autres, une version discrétisée du modèle d'évolution de la perturbation de l'Eq. (6.38) à partir duquel on obtient  $\bar{\phi}_k^{\text{tur}}$  et  $\bar{\varphi}_k^{\text{tur}}$ . Les composantes de l'état seront déterminées d'abord en information complète. Le passage au cas général en information incomplète est ensuite trivial.

#### 6.2.2.1 En information complète

En information complète, l'état est parfaitement observé. Il est alors inutile de garder la deuxième ligne de l'Eq. (6.39) qui ne sert qu'à la construction de la mesure.

En information complète, le régulateur optimal LQ se met sous la forme [Anderson et Moore, 1995a]

$$\boxed{u_k \triangleq -\mathcal{K}_\infty x_k, \quad \text{Régulateur optimal}} \quad (6.40)$$

où  $\mathcal{K}_\infty$  est donné pour rappel par

$$\mathcal{K}_\infty = (R + \mathcal{B}_d^\top P_\infty \mathcal{B}_d)^{-1} (\mathcal{B}_d^\top P_\infty \mathcal{A}_d + (\mathcal{C}_d^{\text{crit}})^\top S). \quad (6.41)$$

La matrice  $P_\infty$  est la solution unique de l'équation de Riccati de commande

$$P_\infty = (\mathcal{C}_d^{\text{crit}})^\top Q \mathcal{C}_d^{\text{crit}} + \mathcal{A}_d^\top P_\infty \mathcal{A}_d - (\mathcal{A}_d^\top P_\infty \mathcal{A}_d + (\mathcal{C}_d^{\text{crit}})^\top S) (R + \mathcal{B}_d^\top P_\infty \mathcal{B}_d)^{-1} (\mathcal{B}_d^\top P_\infty \mathcal{A}_d + S^\top \mathcal{C}_d^{\text{crit}}). \quad (6.42)$$

**Proposition 6.2** *Un vecteur d'état dans l'Eq. (6.39) de la forme*

$$x_k \triangleq \begin{pmatrix} x_{k+1}^{\text{tur}} \\ \bar{\phi}_{k+1}^{\text{tur}} \\ \bar{\varphi}_{k+1}^{\text{tur}} \\ x_k^{\text{m}} \end{pmatrix} \quad (6.43)$$

où les trois dernières composantes correspondent à  $z^{\text{crit}}$ , avec

$$\mathcal{A}_d \triangleq \begin{pmatrix} e^{T_s \mathcal{A}_{\text{tur}}} & 0 & 0 & 0 \\ \Xi & 0 & 0 & 0 \\ \Theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{T_s \mathcal{A}_{\text{m}}} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_d \triangleq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathcal{A}_{\text{m}}^{-1} (e^{T_s \mathcal{A}_{\text{m}}} - \text{I}) \mathcal{B}_{\text{m}} \end{pmatrix}, \quad \Gamma_d \triangleq \begin{pmatrix} \text{I} & 0 & 0 \\ 0 & \text{I} & 0 \\ 0 & 0 & \text{I} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.44)$$

$$\mathcal{C}_d \triangleq \text{D} \begin{pmatrix} 0 & \text{I} & -\text{N} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}_d \triangleq 0, \quad (6.45)$$

et enfin

$$\mathcal{C}_d^{\text{crit}} \triangleq \begin{pmatrix} 0 & \text{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{I} \end{pmatrix}, \quad (6.46)$$

permet d'obtenir les observations  $z$  et la sortie  $z^{\text{crit}}$ .

Le vecteur  $x^{\text{tur}}$  dans ce chapitre est, par commodité, redéfini comme l'état du modèle de phase turbulente, alors qu'au chapitre 5 il correspondait au sous-état regroupant toutes les occurrences de phase turbulente).  $\triangle$

### Démonstration : Construction du modèle d'état de la proposition 6.2.

Du fait que la sortie-critère  $z^{\text{crit}}$  (Eq. (6.12)) inclut désormais des variables additionnelles liées soit à la perturbation soit au modèle dynamique du MD, le modèle d'état de l'Eq. (6.39) a été étendu et complété en conséquence.

La construction du modèle d'état est telle que le critère  $J_{\text{dyn}}^{\text{d}}$  de l'Eq. (6.34) puisse être obtenu en sortie du modèle d'état de l'Eq. (6.39). A cette fin, l'obtention des trois composantes du critère sont détaillées séparément ci-dessous. L'idée sous-jacente consiste à utiliser la sortie du système (6.38) afin d'obtenir  $\bar{\phi}_{k+1}^{\text{tur}}$ ,  $\bar{\varphi}_{k+1}^{\text{tur}}$  et enfin  $x_k^{\text{m}}$ .

**Phase moyenne**  $\bar{\phi}_{k+1}^{\text{tur}}$  sur  $t \in [kT_s, (k+1)T_s[$  :



La solution de l'équation différentielle

$$\dot{r}_{\text{tur}}(t) = \frac{1}{T_s} \phi^{\text{tur}}, \quad (6.47)$$

s'écrit sous la forme intégrale

$$r_{\text{tur}}(t) = \frac{1}{T_s} \int_0^t \phi^{\text{tur}}(s) ds = \frac{C_{\text{tur}}}{T_s} \int_0^t x^{\text{tur}}(s) ds, \quad (6.48)$$

où la dernière égalité utilise la deuxième ligne de l'Eq. (6.38).

Soit maintenant le modèle d'état à temps continu défini par

$$\begin{pmatrix} \dot{x}^{\text{tur}} \\ \dot{r}^{\text{tur}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{\text{tur}} & 0 \\ \frac{C_{\text{tur}}}{T_s} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{\text{tur}} \\ r^{\text{tur}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.49)$$

où  $\eta(t)$  est un bruit d'état continu de spectre  $\Sigma_\eta$ . La première équation correspond à la première équation de (6.38) tandis que la deuxième correspond à l'Eq. (6.47).

En utilisant le lemme 4.2 pour la discrétisation exacte de l'Eq. (6.49), on obtient le système stochastique d'équations aux différences

$$\begin{pmatrix} x_{k+1}^{\text{tur}} \\ r_{k+1}^{\text{tur}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{T_s \mathcal{A}_{\text{tur}}} & 0 \\ \frac{C_{\text{tur}}}{T_s} \mathcal{A}_{\text{tur}}^{-1} (e^{T_s \mathcal{A}_{\text{tur}}} - \mathbf{I}) & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k^{\text{tur}} \\ r_k^{\text{tur}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_k \\ v_k^r \end{pmatrix}, \quad (6.50)$$

où la matrice de transition provient de

$$\exp \left[ T_s \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{\text{tur}} & 0 \\ \frac{C_{\text{tur}}}{T_s} & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} e^{T_s \mathcal{A}_{\text{tur}}} & 0 \\ \frac{C_{\text{tur}}}{T_s} \mathcal{A}_{\text{tur}}^{-1} (e^{T_s \mathcal{A}_{\text{tur}}} - \mathbf{I}) & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad (6.51)$$

après application des lemmes 8.1- 8.2.

Par construction, les équations d'état de ce système sont

$$x_{k+1}^{\text{tur}} = e^{T_s \mathcal{A}_{\text{tur}}} x_k^{\text{tur}} + v_k \quad (6.52a)$$

$$\begin{aligned} r_{k+1}^{\text{tur}} &= \frac{1}{T_s} \int_0^{(k+1)T_s} \phi^{\text{tur}}(t) dt \\ &= \frac{1}{T_s} \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} \phi^{\text{tur}}(t) dt + \int_0^{kT_s} \phi^{\text{tur}}(t) dt \\ &= \frac{1}{T_s} C_{\text{tur}} \mathcal{A}_{\text{tur}}^{-1} (e^{T_s \mathcal{A}_{\text{tur}}} - \mathbf{I}) x_k^{\text{tur}} + \int_0^{kT_s} \phi^{\text{tur}}(t) dt \\ &= \bar{\phi}_{k+1}^{\text{tur}} + \int_0^{kT_s} \phi^{\text{tur}}(t) dt, \end{aligned} \quad (6.52b)$$

compte tenu du résultat avancé à l'Eq. (6.48). De façon à ne retenir que la partie de l'intégrale qui correspond aux instants  $t \in [kT_s, (k+1)T_s]$ , par identification directe on obtient donc le système

$$\begin{pmatrix} x_{k+1}^{\text{tur}} \\ \bar{\phi}_{k+1}^{\text{tur}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{T_s \mathcal{A}_{\text{tur}}} & 0 \\ \frac{C_{\text{tur}}}{T_s} (e^{T_s \mathcal{A}_{\text{tur}}} - \mathbf{I}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k^{\text{tur}} \\ \bar{\phi}_k^{\text{tur}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_k \\ v_k^r \end{pmatrix}, \quad (6.53)$$

qui a bien  $\bar{\phi}_{k+1}^{\text{tur}}$  comme sortie.

**Phase moyenne pondérée**  $\bar{\varphi}_{k+1}^{\text{tur}}$  sur  $t \in [kT_s, (k+1)T_s[$  :

Le même raisonnement s'applique pour le calcul de la moyenne pondérée de la phase. Soit cette fois-ci le système

$$\begin{pmatrix} \dot{x}^{\text{tur}} \\ \dot{s}^{\text{tur}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{\text{tur}} & 0 \\ \frac{1}{T_s} e^{T_s \mathcal{A}_m^T} \mathcal{C}_m^T \mathbf{N}^T \mathcal{C}_{\text{tur}} & -\mathcal{A}_m^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{\text{tur}} \\ s^{\text{tur}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.54)$$

Par construction,  $s^{\text{tur}}$  est la solution de l'équation intégrale

$$s^{\text{tur}}(t) = e^{-t \mathcal{A}_m^T} s^{\text{tur}}(0) + \int_0^t e^{-\mathcal{A}_m^T(t-s)} M \phi^{\text{tur}}(s) ds, \quad (6.55)$$

où  $M = \frac{1}{T_s} e^{T_s \mathcal{A}_m^T} \mathcal{C}_m^T \mathbf{N}^T$ . Aux instants d'échantillonnage,  $s_k^{\text{tur}}$  correspond à

$$s_k^{\text{tur}} = e^{-kT_s \mathcal{A}_m^T} s^{\text{tur}}(0) + \int_0^{kT_s} e^{(t-kT_s) \mathcal{A}_m^T} M \phi^{\text{tur}}(t) dt. \quad (6.56)$$

L'exponentielle de la matrice de transition dans l'Eq. (6.54) n'admet pas, comme précédemment à l'Eq. (6.51), d'expression analytique simple. Mais comme cette matrice est bloc-diagonale, elle est de la forme

$$\exp \left[ T_s \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{\text{tur}} & 0 \\ \frac{1}{T_s} e^{T_s \mathcal{A}_m^T} \mathcal{C}_m^T \mathbf{N}^T \mathcal{C}_{\text{tur}} & -\mathcal{A}_m^T \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} e^{T_s \mathcal{A}_{\text{tur}}} & 0 \\ \Theta(\mathcal{A}_{\text{tur}}, \mathcal{A}_m, M \mathcal{C}_{\text{tur}}, T_s) & e^{-T_s \mathcal{A}_m^T} \end{pmatrix}, \quad (6.57)$$

où  $\Theta$  est un terme à déterminer. Les équations d'état du système de l'équation aux différences correspondante sont

$$x_{k+1}^{\text{tur}} = e^{T_s \mathcal{A}_{\text{tur}}} x_k^{\text{tur}} + v_k = e^{T_s \mathcal{A}_{\text{tur}}} x_k^{\text{tur}} + v_k, \quad (6.58a)$$

$$s_{k+1}^{\text{tur}} = \Theta(\mathcal{A}_{\text{tur}}, \mathcal{A}_m, M \mathcal{C}_{\text{tur}}, T_s) x_k^{\text{tur}} + e^{-T_s \mathcal{A}_m^T} s_k^{\text{tur}} + v_k^s. \quad (6.58b)$$

Soit maintenant le modèle

$$\begin{pmatrix} x_{k+1}^{\text{tur}} \\ \bar{\varphi}_{k+1}^{\text{tur}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{T_s \mathcal{A}_{\text{tur}}} & 0 \\ \Theta(\mathcal{A}_{\text{tur}}, \mathcal{A}_m, M \mathcal{C}_{\text{tur}}, T_s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k^{\text{tur}} \\ \bar{\varphi}_k^{\text{tur}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_k \\ v_k^s \end{pmatrix}. \quad (6.59)$$

Il en découle, comme précédemment que

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_{k+1} &= \Theta(\mathcal{A}_{\text{tur}}, \mathcal{A}_m, M \mathcal{C}_{\text{tur}}, T_s) x_k^{\text{tur}} + v_k^s = s_{k+1}^{\text{tur}} - e^{-T_s \mathcal{A}_m^T} s_k^{\text{tur}} \\ &= e^{-(k+1)T_s \mathcal{A}_m^T} s^{\text{tur}}(0) + \int_0^{(k+1)T_s} e^{(t-(k+1)T_s) \mathcal{A}_m^T} M \phi^{\text{tur}}(t) dt \\ &\quad - e^{-T_s \mathcal{A}_m^T} \left( e^{-kT_s \mathcal{A}_m^T} s^{\text{tur}}(0) - \int_0^{kT_s} e^{(t-kT_s) \mathcal{A}_m^T} M \phi^{\text{tur}}(t) dt \right) \\ &= \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} e^{(t-(k+1)T_s) \mathcal{A}_m^T} M \phi^{\text{tur}}(t) dt \\ &= \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} e^{(t-(k+1)T_s) \mathcal{A}_m^T} \frac{1}{T_s} e^{T_s \mathcal{A}_m^T} \mathcal{C}_m^T \mathbf{N}^T \mathcal{C}_{\text{tur}} \phi^{\text{tur}}(t) dt \\ &= \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} e^{(t-kT_s) \mathcal{A}_m^T} \frac{1}{T_s} \mathcal{C}_m^T \mathbf{N}^T \mathcal{C}_{\text{tur}} \phi^{\text{tur}}(t) dt. \end{aligned} \quad (6.60)$$

Par le même principe utilisé lors de l'obtention de la phase moyenne, la sortie de ce système produit des intégrales de la forme  $\frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} e^{s\mathcal{A}_m^T} \mathcal{C}_m^T \mathbf{N}^T \phi^{\text{tur}}(kT_s + s) ds$ . Les formules définissant  $\varphi_k^{\text{tur}}$  correspondent à des intégrales de convolution en temps rétrograde. Elle peut ainsi être considérée comme une variable duale [Raynaud *et al.*, 2010].

En regroupant les deux, les matrices  $\Xi$  et  $\Theta$  sont déterminées par la discrétisation exacte du modèle d'état à temps continu

$$\begin{cases} \dot{x}_c^{\text{tur}}(t) &= \mathcal{A}_c x_c^{\text{tur}}(t) + \eta(t) \\ z(t) &= \mathcal{C}_c x_c^{\text{tur}}(t) \end{cases} \quad (6.61)$$

où

$$\begin{pmatrix} \dot{x}^{\text{tur}} \\ \dot{r}^{\text{tur}} \\ \dot{s}^{\text{tur}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{\text{tur}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{T_s} \mathcal{C}_{\text{tur}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{T_s} e^{T_s \mathcal{A}_m^T} \mathcal{C}_m^T \mathbf{N}^T \mathcal{C}_{\text{tur}} & 0 & -\mathcal{A}_m^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{\text{tur}} \\ r^{\text{tur}} \\ s^{\text{tur}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.62)$$

avec

$$\mathcal{C}_c \triangleq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}_c = 0, \quad (6.63)$$

comme cela vient d'être démontré. Par conséquent

$$\Xi \triangleq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{T_s \mathcal{A}_c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T, \quad (6.64)$$

$$\Theta \triangleq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{T_s \mathcal{A}_c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T, \quad (6.65)$$

et finalement

$$\Sigma_v \triangleq \int_0^{T_s} e^{t\mathcal{A}_c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Sigma_\eta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T e^{t\mathcal{A}_c^T} dt. \quad (6.66)$$

La solution des intégrales de formes quadratiques du type de l'Eq. (6.66) est obtenue en utilisant le lemme 8.7 qui permet de calculer les variances des bruits discrets équivalents.

### L'état interne du MD :

La discrétisation exacte de l'état interne du MD est trouvée en appliquant le lemme 4.2. Il vient donc

$$x_{k+1}^m = e^{T_s \mathcal{A}_m} x_k^m + \mathcal{A}_m^{-1} (e^{T_s \mathcal{A}_m} - \mathbf{I}) \mathcal{B}_m u_k, \quad (6.67)$$

où le second terme est trouvé par l'application de la propriété 6.1.

### Les composantes de l'état $x_k$ :

Finalement, l'état complet inclut la phase instantanée  $x_k^{\text{tur}}$  à partir de laquelle les phases moyenne et pondérée sont déterminées et l'état interne du MD. Les trois dernières composantes sont nécessaires à l'évaluation du critère et donc font partie explicite de  $z^{k^{\text{crit}}}$ . Ceci étant dit, l'état en information complète est donné par l'Eq. (6.12). ■

### 6.2.2.2 En information incomplète

En information incomplète, l'état  $x_k$  n'est plus supposé connu. Il est estimé à partir des mesures bruitées et décalées dans le temps.

L'estimée  $\hat{x}_{k|k-1}$  à variance minimale de  $x_k$  est donnée par l'espérance conditionnelle de l'état sachant toutes les observations passées jusqu'à l'instant  $t = kT_s$ ; cette estimée peut être obtenue récursivement par l'application du filtre de Kalman [§ 4.3.2].

L'organisation temporelle des opérations, explicitée sur la Fig. 2.14, conduit à un retard de mesure  $T_s$ . En exploitant cette information, la mesure à l'instant  $t = kT_s$ , définie par  $y_k \triangleq z_{k+1}$ , est alors donnée par

$$y_k = D \frac{1}{T_s} \int_{(k-2)T_s}^{(k-1)T_s} (\phi^{\text{tur}}(t) - Np(t)) dt + w'_k \quad (6.68)$$

$$\begin{aligned} &= D \bar{\phi}_{k-1}^{\text{tur}} - \text{DN} \left[ \frac{C_m}{T_s} (e^{T_s A_m} - I) A_m^{-1} \right] x_{k-2}^m \\ &\quad - \text{DN} \left[ \left( \frac{C_m}{T_s} (e^{T_s A_m} - I) A_m^{-2} B_m + I \right) u_{k-2} \right] + w'_k. \end{aligned} \quad (6.69)$$

Ce résultat est tout simplement obtenu en remplaçant  $p(t)$  par son expression donnée par l'Eq. (6.11) et en utilisant la propriété 6.1.

L'écriture du système se fait en utilisant une pseudo-mesure  $z_{k+1} = y_k$ , en analogie avec ce qui avait été proposé à la section 4.4.4. L'état et les matrices du modèle s'écrivent donc

$$x_k \triangleq \begin{pmatrix} x_{k+1}^{\text{tur}} \\ \bar{\phi}_{k+1}^{\text{tur}} \\ \bar{\phi}_{k+1}^m \\ x_k^m \\ \bar{\phi}_k^{\text{tur}} \\ x_{k-1}^m \\ u_{k-1} \end{pmatrix}, \quad A_d \triangleq \begin{pmatrix} e^{T_s A_{\text{tur}}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{T_s A_m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.70)$$

$$B_d \triangleq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ A_m^{-1}(e^{T_s A_m} - I)B_m \\ 0 \\ 0 \\ I \end{pmatrix}, \quad \Gamma_d \triangleq \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.71)$$

$$C_d \triangleq D \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & I & -\frac{1}{T_s} N C_m (e^{T_s A_m} - I) A_m^{-1} & -N \left( \frac{C_m}{T_s} (e^{T_s A_m} - I) A_m^{-2} B_m + I \right) \end{pmatrix} \quad (6.72)$$

La matrice de la sortie-critère regroupe les deuxième, troisième et quatrième composantes de l'état, donc

$$C_d^{\text{crit}} \triangleq \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.73)$$

La commande  $u_k$  n'utilisera que l'information apportée par les observations jusqu'à l'instant  $t = (k - 1)T_s$  ce qui correspond à utiliser la dernière mesure disponible  $y_k$ . Par conséquent le filtre de Kalman est utilisé sous la forme prédicteur et la commande en information incomplète s'écrit

$$u_k = -\mathcal{K}_\infty \hat{x}_{k|k-1}, \quad (6.74)$$

une expression déjà introduite à l'Eq. (4.23). Notons l'abus de notation qui consiste à utiliser la même formulation qu'en information complète. Pour commodité, le gain optimal est interchangeable  $\mathcal{K}_\infty \leftrightarrow (\mathcal{K}_\infty \ 0 \ \dots \ 0)$  selon qu'on se trouve en information complète ou information incomplète.

L'utilisation d'une pseudo-mesure permet d'affecter le retard de mesure supplémentaire à la commande par le biais de l'écriture du filtre sous la forme de l'Eq. (6.74). Une formulation plus compacte est ainsi obtenue, rigoureusement équivalente à celle où les deux retards de la boucle d'OA auraient été explicitement pris en compte. Ce retard additionnel imposé lors de la détermination de la commande utilise, de façon tout à fait équivalente,  $\mathcal{Y}_k$  et non  $\mathcal{Z}_{k-1}$ , comme cela est détaillé à la section 4.4.4.

Une version qui prend en compte directement la mesure  $y_k$  se trouve dans [Correia et al., 2008b]. Celle-ci implique l'utilisation d'un modèle avec un état de plus grande dimension, ce qui soulève des questions liées au déploiement temps réel. Cette version est néanmoins d'un abord plus aisé vu que la vraie mesure  $y_k$  est incorporée telle quelle sans passer par  $z_{k-1}$ .

Une extension tout à fait pertinente consiste à utiliser des retards différents de 1 - on parle alors du cas asynchrone pas opposition au cas synchrone entre mesure et commande. Ceci est plus réaliste du point de vu des systèmes d'OA pour lesquels les retards sont très rarement exactement égaux à l'unité. Le modèle présenté ici étant généralisable sans difficulté majeur à ce cas de figure, le résultat principal se trouve dans [Raynaud et al., 2010].

A ce stade, une représentation globale existe pour le cas en information complète et pour l'information incomplète. L'application en temps réel a déjà été détaillé à la section 5.2, où une indexation spécifique permet de bien échelonner l'enchaînement correcte des diverses opérations.

### 6.2.3 Évaluation de performance

L'évaluation de performance pour le cas des systèmes avec MD infiniment rapides est traitée dans la section 4.4.5. La démarche qu'on suit ici est tout à fait similaire.

Reprenons le critère à temps continu donné par l'Eq. (6.1). Puisque  $\phi^{\text{tur}}$  est un processus ergodique,<sup>3</sup> sa variance empirique converge presque sûrement vers sa variance théorique [Gikhman et Skorokhod, 2006] :

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \|\phi^{\text{tur}}(t)\|^2 dt \stackrel{p.s.}{=} \mathbb{E} \left( \|\phi^{\text{tur}}(t)\|^2 \right), \quad (6.75)$$

à tout instant  $t$ , y compris aux instants d'échantillonnage  $t = kT_s, k \in \mathbb{N}$ . On en déduit

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \|\phi^{\text{tur}}(t)\|^2 dt &\stackrel{p.s.}{=} \text{trace} \left\{ \phi(kT_s) \phi(kT_s)^\top \right\} \\ &\stackrel{p.s.}{=} \text{trace} \left\{ C_{\text{tur}} x_k^{\text{tur}} (x_k^{\text{tur}})^\top C_{\text{tur}}^\top \right\} \\ &\stackrel{p.s.}{=} \text{trace} \left\{ \left( C_{\text{tur}}' C_{\text{tur}}'^\top \Sigma_x \right) \right\}, \end{aligned} \quad (6.76)$$

<sup>3</sup>Étymologie : ergodique est composé à partir des racines grecques *ergon* travail et *odos* route, issue. Un processus est dit ergodique si ses propriétés statistiques (telles que la moyenne et variance) peuvent être déduites à partir d'un unique échantillon suffisamment long.

où  $\mathcal{C}'_{\text{tur}} \triangleq \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{\text{tur}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . L'évaluation de l'Eq. (6.76) et donc de  $\Sigma_x$ , nécessite de connaître les covariances des termes croisés de l'état. C'est l'objet des développements qui suivent.

Le critère de l'Eq. (6.4) peut être considéré l'espérance d'une forme quadratique. Donc, en utilisant les Eqs. (6.23-6.24), avec  $z^{\text{crit}} = C^{\text{crit}} x_{k|k-1}$ ,  $J^c(u)$  s'écrit

$$\begin{aligned} J^c(u) &\stackrel{p.s.}{=} E \left( \|\phi^{\text{tur}}(t)\|^2 \right) + E \left( (z_k^{\text{crit}})^T Q_i z_k^{\text{crit}} + u_k^T R u_k - 2 (z_k^{\text{crit}})^T S u_k \right) \\ &\stackrel{p.s.}{=} E \left( \|\phi^{\text{tur}}(t)\|^2 \right) + E \left( x_k^T \left( (C^{\text{crit}})^T Q_i C^{\text{crit}} \right) x_k + u_k^T R u_k - 2 x_k^T (C^{\text{crit}})^T S u_k \right) \\ &\stackrel{p.s.}{=} E \left( \|\phi^{\text{tur}}(t)\|^2 \right) + \\ &\quad E \left( x_k^T \left( (C^{\text{crit}})^T Q_i C^{\text{crit}} \right) x_k + \hat{x}_{k|k-1}^T \mathcal{K}^T R \mathcal{K} \hat{x}_{k|k-1} + 2 x_k^T (C^{\text{crit}})^T S \mathcal{K} \hat{x}_{k|k-1} \right). \end{aligned} \quad (6.77)$$

A partir de ce point on reprend l'analyse réalisée à la section 4.4.5.

Le second résultat de la propriété 4.5 et les Eqs. (6.76-6.77) permettent d'écrire le critère à temps continu  $J^c(u)$  comme

$$\begin{aligned} J^c(u) &\stackrel{p.s.}{=} E \left( x_f^T W x_f \right) \\ &\stackrel{p.s.}{=} E \left( \begin{pmatrix} x_k \\ \hat{x}_{k|k-1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathcal{C}'_{\text{tur}} \mathcal{C}'_{\text{tur}}^T + (C^{\text{crit}})^T Q_i C^{\text{crit}} & (C^{\text{crit}})^T S \mathcal{K} \\ \mathcal{K}^T S^T C^{\text{crit}} & \mathcal{K}^T R \mathcal{K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ \hat{x}_{k|k-1} \end{pmatrix} \right) \\ &\stackrel{p.s.}{=} \text{trace}(W \Sigma_f). \end{aligned} \quad (6.78)$$

A noter l'utilisation de la matrice  $Q_i$  au lieu de  $Q$  dans l'Eq. (6.78). Ceci permet de regrouper directement le deuxième et troisième termes de l'Eq. (6.30).

En résumé, les matrices  $Q$ ,  $R$ ,  $S$ , le régulateur  $\mathcal{K}_{\infty}$  et le gain de l'observateur ont été  $\mathcal{L}_{\infty}$  déterminés. Dans le cas optimal, ces deux derniers requièrent la résolution des équations de Riccati associées. A partir de l'Eq. (6.78) le critère de performance  $J_c(u)$  peut être évalué soit pour le cas optimal soit pour des cas sous-optimaux, à l'appui de l'Eq. (6.78). Ce calcul analytique permet : a) de synthétiser le régulateur optimal pour les OA dont la dynamique du MD ne peut pas être négligée et b) d'évaluer l'impact des différents paramètres du système sur la performance finale (en variance de phase résiduelle). Cela peut être utile lors de la conception des systèmes d'OA et de la définition des budget d'erreur associés.

### 6.2.3.1 Énergie de commande

L'énergie de commande définie par

$$\mathbf{E}_n(u) \triangleq E \{ \|u_k\|^2 \} \triangleq \text{trace} \left( E \left\{ u_k u_k^T \right\} \right), \quad (6.79)$$

peut se calculer en utilisant l'identité presque sûre

$$\mathbf{E}_n(u) \stackrel{p.s.}{=} \text{trace} \left\{ \mathcal{K}_{\infty} \Sigma_{\hat{x}} \mathcal{K}_{\infty}^T \right\}, \quad (6.80)$$

où  $\Sigma_{\hat{x}}$  est la matrice de covariance de l'état estimé déterminée par la solution de l'équation de Lyapunov associée (lemmes 8.5 et 8.6).

**Démonstration : Energie de commande.**

La commande  $u_k$  étant  $u_k = -\mathcal{K}\hat{x}_{k|k-1}$ , alors

$$\mathbf{E}_n(u_k) = \mathbf{E} \left( u_k u_k^\top \right) \quad (6.81)$$

$$= \mathcal{K}_\infty \mathbf{E} \left( \hat{x}_{k|k-1} \hat{x}_{k|k-1}^\top \right) \mathcal{K}_\infty^\top \quad (6.82)$$

$$= \mathcal{K}_\infty \Sigma_{\hat{x}} \mathcal{K}_\infty^\top \quad (6.83)$$

L'énergie de commande correspond à la somme sur toutes les composantes  $\sum_{i \geq 1} u_i u_i^\top$ , d'où l'expression annoncée. ■

**6.2.4 Régulateur optimal et régulateurs sous-optimaux**

Deux solutions de référence ont été analysées, à savoir :

1. Solution VM optimale
2. Simple projection de la phase moyenne estimée sur l'espace miroir. Cette solution était optimale pour des miroirs infiniment rapides

**Solution VM :**

En information complète, le régulateur optimal LQ se met sous la forme (6.40), soit pour rappel

$$u_k \triangleq -\mathcal{K}_\infty x_k, \quad (6.84)$$

avec  $\mathcal{K}_\infty$  donné par l'Eq. (6.41), déterminé à partir de la solution unique de l'équation de Riccati algébrique de l'Eq. (6.42).

En information incomplète, la commande optimale consiste en un retour d'état reconstruit par le filtre de Kalman (sous forme prédicteur ou estimateur selon les considérations faites auparavant), comme défini par l'Eq. (4.23), où l'état estimé  $\hat{x}_{k|k-1}$  remplace  $x_k$ .

**Projection de phase sur l'espace miroir :**

Des régulateurs sous-optimaux peuvent être considérés. L'un d'entre eux est celui qui avait été trouvé au chapitre 4 à la section 4.4 et qui était optimal en cas de réponse du MD infiniment rapide.

$u_k = - \left( \mathbf{N}^\top \mathbf{N} \right)^{-1} \mathbf{N}^\top \bar{\phi}_{k+1}^{\text{tur}} = -\mathcal{K}^{\text{sous-opt}} x_k.$	Régulateur sous-optimal
--	-------------------------

(6.85)

Pour rappel, la projection orthogonale sur l'espace miroir était alors la solution optimale.

**6.3 Le concept *woofer-tweeter***

Le concept du *woofer-tweeter*<sup>4</sup> en OA consiste à corriger la perturbation avec un correcteur optique à double étage [Brennan et Rhoadarmer, 2006]. Le woofer corrige les basses fréquences spatiales, dont l'évolution temporelle est plus lente et l'amplitude plus importante (section 2.3.2.3).

<sup>4</sup>Terme anglais prêté aux systèmes acoustiques dont la traduction en français serait « haut-parleur grave-aigu », tr. de l'aut.

En complément le tweeter corrige la partie duale de la perturbation, à savoir les hautes fréquences spatiales qui évoluent plus rapidement et dont l'amplitude est bien plus faible. Ce second étage corrige aussi la perturbation rémanente après l'action du premier. Par conséquent, dans le cas général, ces deux miroirs engendrent des espaces de correction qui se chevauchent - Fig. 6.2.

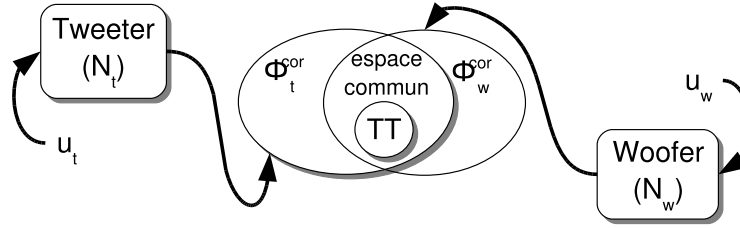


FIG. 6.2 – Espaces de correction engendrés par le woofer et le tweeter. Les indices t et w se réfèrent au tweeter et au woofer respectivement. L'espace de correction commun peut être décomposé sur plusieurs modes, dont le TT. Celui-ci est un sous-espace de l'espace commun, qui est traité dans l'exemple numérique.

Plusieurs méthodes ont été conçues pour parvenir à découper les espaces de correction dans le but d'éviter qu'une double correction de sens inverse ne soit produite, ce qui entraînerait la saturation immédiate des MD [Lavigne et Véran, 2008, Véran et Herriot, 2006, Hampton *et al.*, 2006]. Ces méthodes consistent, en termes généraux, à découper les espaces de correction de façon à ce qu'ils soient disjoints, c'est-à-dire à garantir que le chevauchement soit inexistant en faisant appel à des projections orthogonales [Conan *et al.*, 2007, Petit *et al.*, 2008]. Cependant ces méthodes ne sont pas issues de la résolution d'un problème à variance minimale n prennent en compte de façon explicite la dynamique temporelle du woofer (voire aussi du tweeter).

Contrairement à ces dernières solutions, l'approche exposée par la suite permet en outre d'inclure les différences de course propres aux miroirs.

Pour résumer, l'approche LQG traite le problème de la commande VM pour le woofer-tweeter en prenant en compte les caractéristiques spatio-temporelles des deux miroirs ainsi que l'excursion des actionneurs.

Dans cette section un modèle étendu à deux étages est présenté en suivant la méthode esquissée par [Correia *et al.*, 2009d]. Sans perte de généralité, des résultats avec des modèles du premier et second ordre sont présentés. Des modèles d'ordre plus élevé peuvent être envisagés si cela est jugé pertinent.

La Fig. 6.3 montre le principe de fonctionnement. La phase de correction est la somme de celle du woofer et celle du tweeter, soit

$$\phi^{cor} = \phi_w^{cor} + \phi_t^{cor}. \quad (6.86)$$

Supposons que la dynamique du woofer est décrite par le système dynamique suivant

$$\begin{cases} \dot{x}^w(t) &= \mathcal{A}_w x^w(t) + \mathcal{B}_w u^w(t) \\ p^w(t) &= \mathcal{C}_w x^w(t) \end{cases}. \quad (6.87)$$

La phase de correction correspondante  $\phi_w^{cor}$  est définie par

$$\phi_w^{cor} \triangleq N_w p^w(t), \quad (6.88)$$

où  $N_w$  est la matrice d'influence du woofer et  $p^w(t)$  est la déformation du woofer dans une base de fonctions d'influence normalisées. Le woofer est couplé à un miroir tweeter infiniment rapide, pour



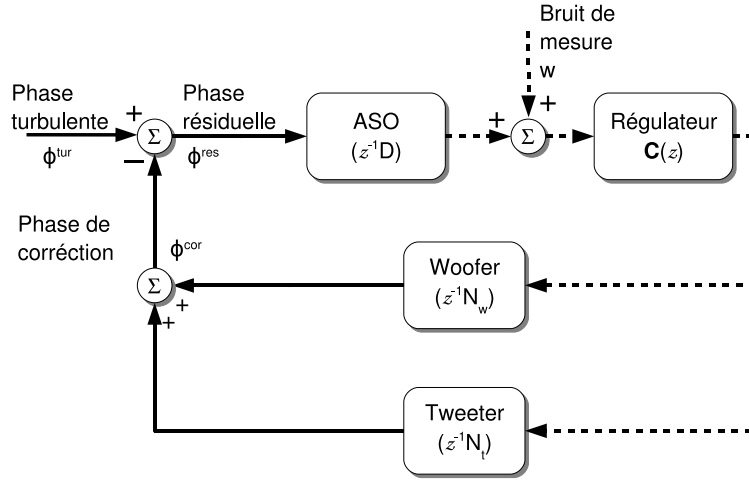


FIG. 6.3 – Architecture de commande en boucle fermée du woofer-tweeter. La phase de correction est la somme des corrections individuelles apportées par chacun des miroirs.

lequel,

$$\phi_t^{\text{cor}}(t) \triangleq \mathbf{N}_t u_k^t \quad \forall t \in [kT_s, (k+1)T_s]. \quad (6.89)$$

La phase de correction est désormais

$$\phi^{\text{cor}}(t) = \mathbf{N}_w p^w(t) + \mathbf{N}_t u_k^t \quad t \in [kT_s, (k+1)T_s]. \quad (6.90)$$

où le vecteur de commande généralisé  $u_k$  est la concaténation des commandes du woofer et du tweeter :

$$u_k \triangleq \begin{pmatrix} u_k^w \\ u_k^t \end{pmatrix}. \quad (6.91)$$

### 6.3.1 Critère d'optimisation

Pour mener à terme la démarche requise par la stratégie LQG (brièvement rappelée à la Fig. 6.1), trois matrices de pondération  $Q_{\text{wt}}$ ,  $R_{\text{wt}}$  et  $S_{\text{wt}}$  doivent être déterminées afin qu'un critère équivalent discret puisse être écrit sous la forme

$$J_{\text{wt}}^d(u) = \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \left( (z_k^{\text{crit}})^T Q_{\text{wt}} z_k^{\text{crit}} + u_k^T R_{\text{wt}} u_k + 2 (z_k^{\text{crit}})^T S_{\text{wt}} u_k \right), \quad (6.92)$$

où  $Q_{\text{wt}} - S_{\text{wt}} R_{\text{wt}}^{-1} S_{\text{wt}}^T \geq 0$  et  $R_{\text{wt}} = R_{\text{wt}}^T > 0$ .

Si l'espace de correction est atteint par les deux correcteurs, alors un problème d'indétermination de la solution se pose. Dans le but d'éviter cette difficulté, la matrice  $R_{\text{wt}}$  inclura des pénalisations supplémentaires sur la commande  $u$ . Cette technique, qui présente l'avantage de décrire le problème de façon plus proche de sa réalité physique (les contraintes électro-mécaniques sont en partie prises en compte), permet de s'affranchir de l'indétermination de la solution en imposant des pénalisations distinctes sur les commandes à appliquer à chacun des MD.

**Proposition 6.3** Les matrices de pondération sont

$$Q_{wt} \triangleq Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{N}_w \mathbf{N}_w^\top & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} (\mathbf{I} + 2\mathbf{B}_w^\top \mathcal{A}_w^{-T} \mathcal{A}_w^{-1} \mathcal{B}_w) & -\mathbf{I} \\ 0 & -\mathbf{I} & Q_0 \end{pmatrix} \geq 0, \quad (6.93)$$

$$S_{wt} \triangleq \begin{pmatrix} -\mathbf{N}_w & -\mathbf{N}_t \\ -\mathcal{A}_w^{-1} \mathcal{B}_w & 0 \\ S_0 & T_{wt} \end{pmatrix} \quad (6.94)$$

et

$$R_{wt} \triangleq \begin{pmatrix} R_0 & \mathbf{I} + G_{wt} \\ (\mathbf{I} + G_{wt})^\top & \mathbf{N}_t^\top \mathbf{N}_t \end{pmatrix} > 0, \quad (6.95)$$

si l'on prend pour dynamique du woofer celle du MD dynamique étudié à la section 6.2, Eq. (6.8), autrement dit,  $\mathcal{A}_w = \mathcal{A}_m$ ,  $\mathcal{B}_w = \mathcal{B}_m$ ,  $\mathcal{C}_w = \mathcal{C}_m$  et  $\mathcal{D}_w = \mathcal{D}_m$ . Dans l'Eq. (6.94) et (6.95) les termes  $T_{wt}$  et  $G_{wt}$  de définissent par

$$T_{wt} = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} (\mathcal{C}_w e^{s\mathcal{A}_w})^\top \mathbf{N}_w^\top \mathbf{N}_t dt, \quad (6.96)$$

et

$$G_{wt} = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} (\mathcal{C}_w e^{s\mathcal{A}_w} \mathcal{A}_w^{-1} \mathcal{B}_w)^\top \mathbf{N}_w^\top \mathbf{N}_t dt. \quad (6.97)$$

△

### Démonstration : Développement du critère à temps continu pour le woofer-tweeter.

Le développement du coût incrémental de l'Eq. (6.2) donne

$$\begin{aligned} J^c(u)_k &= \frac{1}{T_s} \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} \|\phi^{\text{res}}(t)\|^2 dt \\ &= \frac{1}{T_s} \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} \|\phi^{\text{tur}}(t) - \phi^{\text{cor}}(t)\|^2 dt \\ &= \frac{1}{T_s} \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} (\phi^{\text{tur}}(t) - \mathbf{N}_w p^w(t) - \mathbf{N}_t u^t(t))^\top (\phi^{\text{tur}}(t) - \mathbf{N}_w p^w(t) - \mathbf{N}_t u^t(t)) dt \\ &= \frac{1}{T_s} \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} \phi^{\text{tur}}(t)^\top \phi^{\text{tur}}(t) + p^w(t)^\top \mathbf{N}_w^\top \mathbf{N}_w p^w(t) - 2\phi^{\text{tur}}(t)^\top \mathbf{N}_w p^w(t) \\ &\quad - 2\phi^{\text{tur}}(t)^\top \mathbf{N}_t u_k^t + 2p^w(t)^\top \mathbf{N}_w^\top \mathbf{N}_t u_k^t + (u_k^t)^\top \mathbf{N}_t^\top \mathbf{N}_t u_k^t dt, \end{aligned} \quad (6.98)$$

où  $p^w(kT_s + s) = \mathcal{C}_w e^{s\mathcal{A}_w} x_k^w + (\mathbf{I} + \mathcal{C}_w e^{s\mathcal{A}_w} \mathcal{A}_w^{-1} \mathcal{B}_w) u_k^w$ . Cette expression est en tout similaire à l'Eq. (6.9). La première ligne de la dernière égalité avait déjà été trouvée si  $p^w(t) = p(t)$ . Les trois derniers termes sont développés ci-dessous.

Pour le premier

$$\frac{1}{T_s} \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} \phi^{\text{tur}}(t)^\top \mathbf{N}_t u_k^t dt = (\bar{\phi}_{k+1}^{\text{tur}})^\top \mathbf{N}_t u_k^t. \quad (6.99)$$

Le deuxième

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_s} \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} \left[ \mathcal{C}_w e^{(t-kT_s)\mathcal{A}_w} x_k^w + \left( \mathbf{I} + \mathcal{C}_w e^{(t-kT_s)\mathcal{A}_w} \mathcal{A}_w^{-1} \mathcal{B}_w \right) u_k^w \right]^\top \mathbf{N}_w^\top \mathbf{N}_t u_k^t dt = \\ (x_k^w)^\top T_{wt} u_k^t + (u_k^w)^\top (\mathbf{N}_w^\top \mathbf{N}_t + G_{wt}) u_k^t, \end{aligned} \quad (6.100)$$



où la cinquième composante est la commande du tweeter. Il se met alors sous la forme

$$\mathcal{B}_{\text{wt}} \triangleq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \mathcal{A}_{\text{w}}^{-1}(e^{T_s \mathcal{A}_{\text{w}}} - \mathbf{I})\mathcal{B}_{\text{w}} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \Gamma_{\text{wt}} \triangleq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.106)$$

$$\mathcal{C}_{\text{wt}} \triangleq \mathbf{D} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{N}^t & \mathbf{I} & -\frac{\mathbf{N}^w \mathcal{C}_{\text{w}}}{T_s} (e^{T_s \mathcal{A}_{\text{w}}} - \mathbf{I}) \mathcal{A}_{\text{w}}^{-1} & \dots \\ & & & & -\mathbf{N}^w \left( \frac{\mathcal{C}_{\text{w}}}{T_s} (e^{T_s \mathcal{A}_{\text{w}}} - \mathbf{I}) \mathcal{A}_{\text{w}}^{-2} \mathcal{B}_{\text{w}} + \mathbf{I} \right) \end{pmatrix}, \quad (6.107)$$

$$\mathcal{C}_{\text{wt}}^{\text{crit}} \triangleq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.108)$$

On constate que concernant le tweeter, seule la commande  $u_{k-1}^t$  contribue à la mesure, le tweeter n'ayant pas d'état interne.

#### Remarques :

- (i) Répartition optimale de la commande. A première vue, l'existence d'un miroir infiniment rapide sans contraintes de course aurait pu indiquer, par elle seule, que le régulateur optimal attribuerait l'effort de correction entièrement au tweeter. Ceci ne correspond pas entièrement à la vérité puisque la dynamique du woofer contribue en effet à ajuster au mieux la correction à la dynamique de la perturbation grâce à sa propre inertie. Autrement dit, une réponse temporelle plutôt lente donnera lieu à moins d'erreur (en termes de variance de perturbation résiduelle) qu'une réponse constante par morceaux de durée  $T_s$ , du fait que l'évolution des perturbations de phase est également lente (la fréquence de coupure étant de l'ordre du Hertz). Cet effet sera mis en évidence par des simulations numériques.
- (ii) Unicité de la solution et pénalisations supplémentaires. Si l'espace commun dans la Fig. 6.3 peut être atteint par plusieurs combinaisons de commandes  $u^w$  et  $u^t$  cela pose alors un problème de résolution et l'unicité de la solution. Cependant, en OA le woofer et le tweeter présentent des caractéristiques de course différentes. L'inclusion explicite de ces contraintes dans le problème d'optimisation est faite à l'aide de pénalisations supplémentaires sur les commandes  $u$ . ◀

La pénalisation rend le problème bien posé et conduit à une solution unique. Elle permet en outre de choisir une solution parmi toutes les solutions possibles si les pénalités étaient absentes. La solution pénalisée, pour une pénalisation très faible, permet d'approcher des solutions non pénalisées d'aussi près que l'on souhaite

Pour cela, la matrice de pondération  $R_{\text{wt}}$  dans l'Eq. (6.95) est affectée d'un terme supplémentaire

$$R_{\text{wt}}^p = R_{\text{wt}} + R_{\text{wt}}^u = \begin{pmatrix} R_0 & \mathbf{N}_{\text{w}}^T \mathbf{N}_{\text{t}} + G_{\text{wt}} \\ (\mathbf{N}_{\text{w}}^T \mathbf{N}_{\text{t}} + G_{\text{wt}})^T & \mathbf{N}_{\text{t}}^T \mathbf{N}_{\text{t}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} > 0 \quad (6.109)$$

où le rapport  $\alpha/\beta$  détermine la répartition de l'effort de commande sur chacun des miroirs. Dans le cas général,  $\beta$  est un terme faible de l'ordre de  $1/\sigma_\phi^2$ , où  $\sigma_\phi^2$  est la variance modale en boucle ouverte des modes à corriger. Après avoir fixé  $\beta$  la valeur de  $\gamma$  est déterminée à partir rapport des courses entre le woofer et le tweeter.

La solution optimale peut néanmoins dans tous les cas être obtenue par la minimisation d'un problème sous contraintes imposées par les excursions des DM. La solution à énergie minimale ainsi déterminée ne risquerait pas d'engendrer des corrections de sens inverse des MD. Ceci pourrait se produire dans la version pénalisée si les pénalisations sont beaucoup trop faibles vis-à-vis de la variance de la phase du mode de correction, ce qui, en pratique, n'est jamais le cas car les courses sont bien adaptées aux perturbations (notamment en terme de variance) qu'ils sont supposés corriger.

## 6.4 Modèles linéaires

### 6.4.1 La perturbation de phase

Dans l'ensemble des simulations réalisées dans ce chapitre deux types de perturbations ont été considérés : les perturbations d'origine atmosphérique et celles d'origine mécanique [section 2.3.2.4].

Le choix des paramètres du modèle de perturbation consiste à ajuster au mieux (dans le sens des moindres carrés) le comportement à l'origine des courbes d'auto-corrélation. Ce choix est suggéré par l'auto-corrélation à un pas, paramètre utilisé par la commande optimale pour la prédiction à court terme. Une argumentation sur ce choix se trouve à la section 4.5.

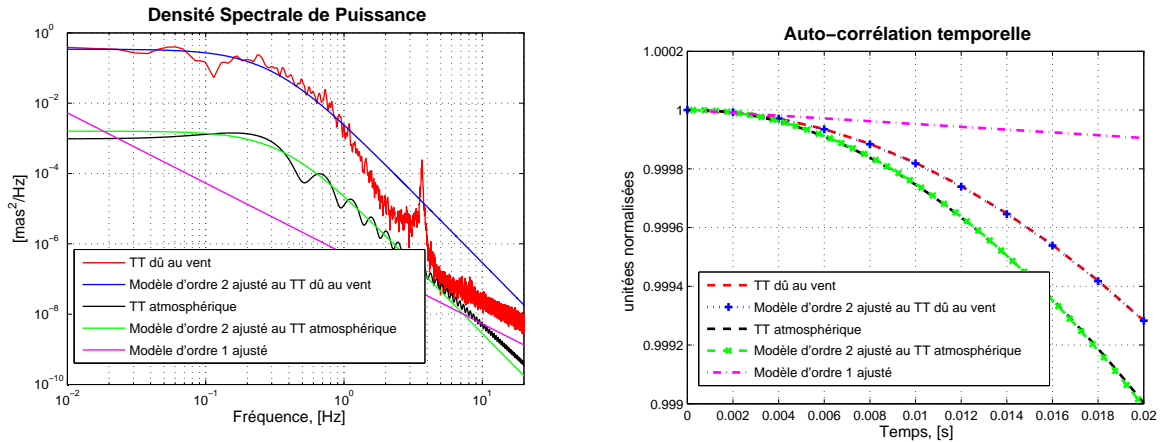


FIG. 6.4 – Gauche : Comparaison des DSP temporelles du TT atmosphérique et du TT induit par le vent dans le système E-ELT M4-M5.

Droite : Courbes d'auto-corrélation des perturbations et les modèles du premier et second ordre qui s'ajustent au mieux (au sens des moindres carrés) aux premier pas de décorrélation, en proximité de l'origine à  $t = 0$ s. Les paramètres de simulation se trouvent sur la Fig. 4.9.

Les différences entre le modèle et le comportement réel du signal n'impactent pas la corrélation que sur le long terme. La corrélation à court terme est similaire, comme cela peut être observé sur les courbes de la Fig. 6.4.

### 6.4.2 Le miroir déformable

En général, la dynamique temporelle des MD reste à ce jour relativement peu étudiée. Cela relève principalement du fait que les temps de réponse mono-actionneur sont souvent faibles vis-à-vis du temps d'intégration. En conséquence, l'impact sur la performance optique est généralement négligeable.

Il faut noter que la connaissance de la dynamique d'un seul actionneur pris isolément n'est pas descriptive de la dynamique de l'ensemble de la structure électromécanique du MD.

L'étude du comportement dynamique par modélisation d'éléments finis a fait l'objet de plusieurs travaux ; à titre d'exemple [Charton *et al.*, 2003] et plus récemment [Gasmi *et al.*, 2008].

Les études expérimentales sont rares car elles nécessitent des moyens techniques complexes. Un tel exemple est la méthode stroboscopique. Elle consiste à faire l'acquisition cadencée d'images à fréquence élevée afin de reproduire le mouvement de la surface réfléchissante. Ces images peuvent être obtenues par techniques interférométriques (voir par exemple [Horsleya *et al.*, 2007, Conway *et al.*, 2007]). Suite à une décomposition de la déformation sur une base de modes appropriée, le comportement dynamique global peut être ainsi caractérisé. Des paramètres de modèles d'ordre convenable calés sur le comportement physique du MD peuvent être alors déterminés.

Dans ce mémoire, sont considérés des modèles simplifiés du premier et du second ordre. Des études paramétriques permettent de dégager des comportements généraux non spécifiques d'un MD en particulier.

#### 6.4.2.1 Commande modale

On a déjà évoqué le fait que la dynamique temporelle d'un seul actionneur pris isolément n'est pas forcément représentative de la dynamique de l'ensemble.

La modélisation analytique des équations des plaques rigides régies par l'équation bi-harmonique [Timoshenko, 1959]

$$\nabla^2 \nabla^2 h = \frac{q}{F}, \quad (6.110)$$

avec  $q$  est la charge appliquée et

$$F = \frac{Ee^3}{12(1 - \nu_p^2)}, \quad (6.111)$$

où  $E$  est le module du coefficient d'élasticité de Young,  $e$  l'épaisseur de la plaque et  $\nu_p$  le coefficient de Poisson, montre que les modes propres du MD changent considérablement en fonction des contraintes physiques auxquelles ils sont sujets [Ellis, 1999]. Cela revient à fixer des conditions aux bords distinctes, selon que la membrane est libre ou accrochée, selon le nombre des points d'attache, les coefficients de l'Eq. (6.111) et de la géométrie utilisée.

Les difficultés de l'étude du problème s'accroissent avec le nombre d'actionneurs et la taille des MD. Des modèles à échelle réduite sont préférables du moment qu'ils traduisent le comportement dynamique des grands DM.

Un modèle à éléments finis avec 9 par 9 actionneurs liant une base rigide à une plaque réfléchissante a été simulé à l'ONERA Ce modèle est construit de sorte à représenter le miroir M4 du futur E-ELT. L'étude d'un modèle à échelle réelle se trouve dans [Gasmi *et al.*, 2008].

Une observation remarquable est que les modes propres du MD ainsi modélisé ressemblent de très près aux modes de Zernike tip, tilt, défocus et astigmatismes. Cette étude suggère aussi que les modes principalement affectés sont les bas ordres, indiquant ainsi que la commande de miroirs avec plusieurs centaines d'actionneurs peut se ramener à la commande modale d'un jeu limité de modes.

Une commande modale est donc jugée pertinente pour cette étude. La Fig. 6.5 montre les fonctions de transfert du TT et défocus, leurs interactions et la localisation des fréquences de résonance. Sauf les modes de TT, tous les autres modes sont nettement découplés. Pour le TT le découplage est moins évident, bien que l'analyse suggère que l'interaction de ces deux modes reste faible. Dans ce qui suit, on traitera le TT indépendamment l'un de l'autre.

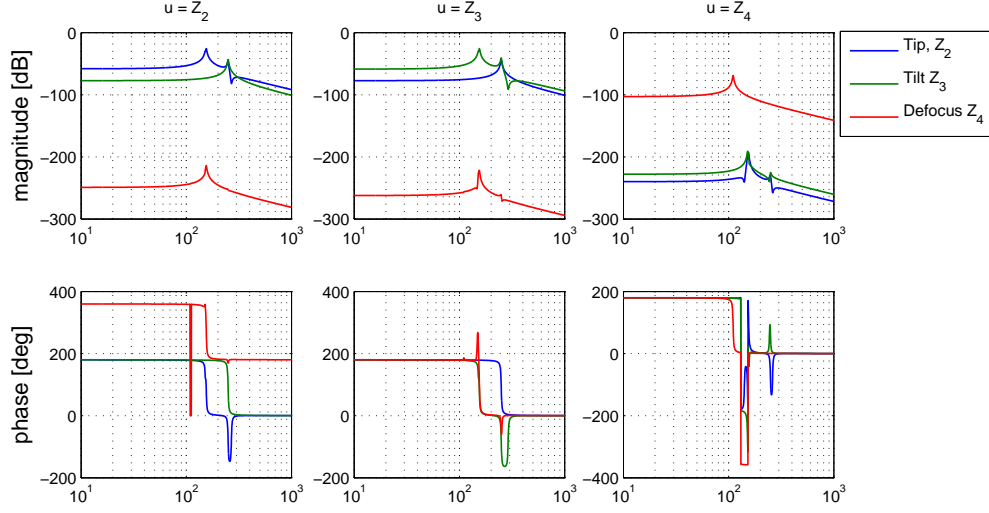


FIG. 6.5 – Fonctions de transfert du TT et défocus ( $Z_2$ ,  $Z_3$  et  $Z_4$ ) du modèle mécanique à éléments finis (magnitude et phase en fonction de la fréquence temporelle). La commande modale est considérée ici directement définie dans une base de polynômes de Zernike.

Par conséquent, on suppose que les modes optiques que l'on souhaite commander, tels que le TT atmosphérique, sont une combinaison linéaire des modes propres du MD. On peut sans doute séparer ces modes propres en rapides et lents. Les derniers sont commandés par un régulateur qui prend en compte leur dynamique, tandis que les modes rapides sont commandés par un régulateur sous-optimal car leur dynamique est telle qu'elle n'exige pas une régulation aussi précise.

Les illustrations de ce chapitre se focalisent plus précisément sur la commande des modes de TT d'origine purement atmosphérique. D'une part cela reste un cas simple et représentatif et d'une autre part ces deux modes portent la plupart de l'énergie optique d'origine atmosphérique [Noll, 1976, Wang et Markey, 1978] et mécanique aussi (cf. §6.4.1). Un argument de plus : plusieurs systèmes d'OA emploient des MD à double étage, composés d'un miroir de basculement dédié et d'un MD au sens propre. Cela dit, le TT peut être regardé comme un jeu de modes particulier.

Aussi important, le coût des calculs numériques, hors- et en-ligne, pour le TT est raisonnable malgré l'état étendu établi dans la section 6.2.2.

#### 6.4.2.2 Modèles du premier ordre

Soit le modèle dynamique du premier ordre caractérisé par l'équation différentielle

$$\dot{p}(t) + \frac{1}{\tau}p(t) = \frac{1}{\tau}u(t), \quad (6.112)$$

où  $\tau$  est la constante de temps du miroir.

En termes de modèle d'état, cela revient à poser dans l'Eq. (6.8)

$$\mathcal{A}_m = (-1/\tau), \mathcal{B}_m = (1/\tau), \mathcal{C}_m = 1, \mathcal{D}_m = 0. \quad (6.113)$$

Ce type de modèles ont l'avantage d'être caractérisés par un seul paramètre, à savoir la constante de temps  $\tau$ . La réponse fréquentielle d'un tel modèle est montrée sur la Fig. 6.6. La fréquence de coupure à -3 dB est donnée par

$$f_c = \frac{2\pi}{\tau}. \quad (6.114)$$

Les MD infiniment rapides peuvent être considérés un cas limite des MD à dynamique du premier

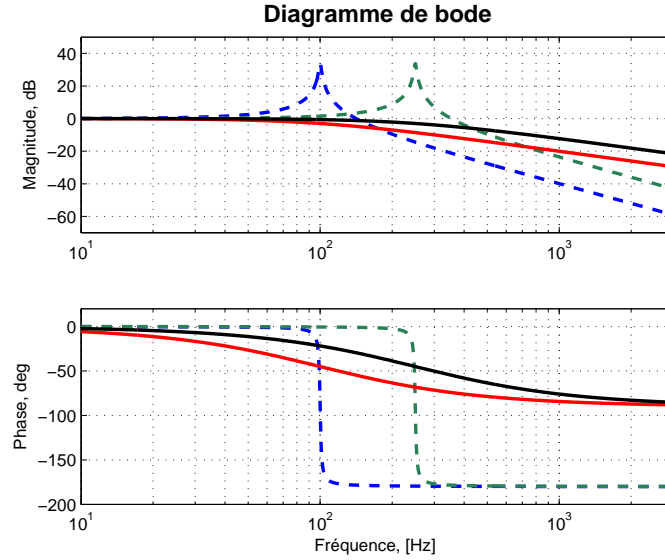


FIG. 6.6 – Diagramme de Bode du mode TT, modèles d'ordre 1 (traits continus) et d'ordre 2 (tirets). Constantes de temps de 1/100 et 1/250 s. Pour les modèles d'ordre deux, résonances naturelles  $f_n = \{100, 250\}$  Hz et coefficient d'amortissement  $\xi = 0,01$ .

ordre quant  $\tau \rightarrow 0$ .

### 6.4.2.3 Modèles du second ordre

Des modèles dynamiques du second ordre expriment de manière succincte et représentative la dynamique temporelle d'un large ensemble de phénomènes physiques.

La dynamique du MD est régie par l'équation différentielle du second ordre

$$\ddot{p}(t) + 2\xi\omega_n\dot{p}(t) + \omega_n^2 p(t) = \omega_n^2 u(t) \quad (6.115)$$

où  $\xi$  est le coefficient d'amortissement et  $\omega_n = 2\pi f_n$  est la pulsation naturelle de résonance (en rads/s).

La représentation d'état canonique observable<sup>5</sup> de l'équation différentielle de l'Eq. (6.115) devient

<sup>5</sup>Voir annexes pour explication plus élargie.



[Vaccaro, 1995]

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_m &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n \end{pmatrix}, & \mathcal{B}_m &= \begin{pmatrix} 0 \\ \omega^2 \end{pmatrix} \\ \mathcal{C}_m &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, & \mathcal{D}_m &= 0 \end{aligned} \quad (6.116)$$

Selon la valeur de  $\xi$  une résonance pourra survenir à  $f_r = \frac{\omega_n}{2\pi} \sqrt{1 - \xi^2}$ . Des réponses fréquentielles sont montrées sur la Fig. 6.6 pour deux valeurs distinctes de  $f_n$  et pour un amortissement de  $\xi = 0, 01$ .

De plus, les modèles d'état peuvent être convertis en fonctions (ou matrices s'il s'agit du cas multi-mode) de transfert en appliquant le lemme 4.1. Ces FT sont utiles pour l'interprétation du fonctionnement de la commande optimale. Cet outil est d'ailleurs très souvent exploité par la communauté en OA pour la synthèse de régulateurs (se référer à la section 2.8).

## 6.5 Outils d'évaluation : calculs analytiques, simulations Monte Carlo

L'évaluation de la performance des régulateurs proposés dans ce chapitre peut être réalisée au moyen de calculs analytiques ou de simulations de Monte Carlo. Ces deux approches sont détaillées dans les paragraphes ci-dessous.

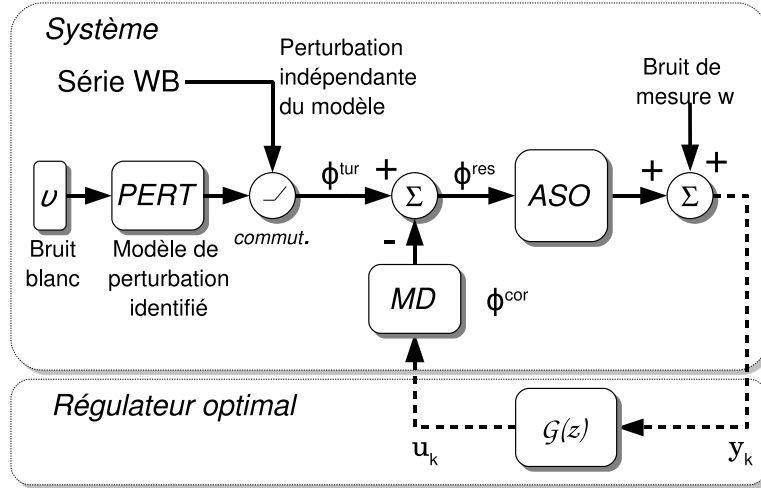


FIG. 6.7 – Variantes d'utilisation du simulateur Monte Carlo. La série temporelle en entrée est issue du bloc 'PERT' et le modèle utilisé pour la générer est aussi utilisé pour la construction du modèle d'état orienté commande. Ceci est le cas cohérent. Deuxième option, utiliser directement une série temporelle dont le modèle générateur n'est pas connu. L'information exploitée pour la synthèse n'est pas cohérente avec le modèle sous-jacent à la perturbation. C'est donc le cas incohérent.

### Calculs analytiques :

Une fois définies les matrices de pondération  $Q$ ,  $R$  et  $S$  dans l'Eq. (6.13)-(6.15), les gains de commande  $K$  et d'observation  $L$  et enfin le modèle d'état pour la commande dans les Eqs. (6.70-6.72), la performance du système peut être évaluée analytiquement à partir des résultats présentés à la section 6.2.3.

Le calcul analytique permet de tester aussi la stabilité temporelle du régulateur et de quantifier l'effort de commande (sachant la variance de  $u$ ) requis pour piloter des DM à dynamique variable.

De plus, comme cela a été montrée à la section 4.3.3, les modèles d'état peuvent être convertis en fonctions de transfert de phase et de bruit (Eqs. (2.68-2.69)). Le calcul étant exact, l'intégration des spectres de phase résiduelle et de bruit propagé à travers la boucle de commande sont de valeur exactement égale à la performance évaluée par l'approche consistant à évaluer l'espérance de l'erreur résiduelle à la section 6.2.3.

**Simulation Monte Carlo :** Cette approche consiste à mettre en œuvre une simulation temporelle traduisant le schéma-bloc de la Fig. 4.3. Deux scénarios dont l'utilisation correspond à des besoins distincts, sont schématisés sur la Fig. 6.7, plus précisément les cas cohérent et incohérent. L'entrée est toujours une série temporelle des coefficients modaux de  $\phi^{\text{tur}}(t)$ .

- Cas cohérent : le partie *Système*, dans la Fig. 4.3, est supposée connu. Cette variante, dite cohérente, permet d'évaluer empiriquement le critère pour un système sans erreur de modèle ou dont l'erreur est connue et maîtrisée. Cela est bien sûr équivalent au calcul analytique. Les résultats issus de cette simulation à horizon fini convergent théoriquement vers les résultats analytiques (par construction à horizon infini).
- Cas incohérent : le bloc *Système* est inconnu. L'entrée de perturbation et/ou le MD sont non conformes aux modèles utilisés lors de la synthèse de la commande. C'est le cas dit incohérent. Par conséquent, cette variante ajoute aux précédentes les erreurs de modélisation de la perturbation et du MD. Une étude de robustesse vis-à-vis des erreurs de paramétrisation des modèles devient ainsi possible et souhaitable. A travers cette étude la pertinence du choix des paramètres du modèle de perturbation peut être mis en évidence et enfin validé.

Les variances de phase résiduelle sont déterminées sur des réalisations suffisamment longues pour garantir la convergence statistique. Cet aspect est très important puisque le modèle de perturbation sous-entend une évolution temporelle très lente (voir Fig. 6.4). Pour des télescopes de classe 8-mètres la fréquence de coupure se trouve aux alentours du Hertz tandis que pour les ELT la fréquence de coupure est encore plus basse, du fait que  $f_c \propto D^{-1}$ .

### 6.5.1 Mise en œuvre du simulateur Monte Carlo

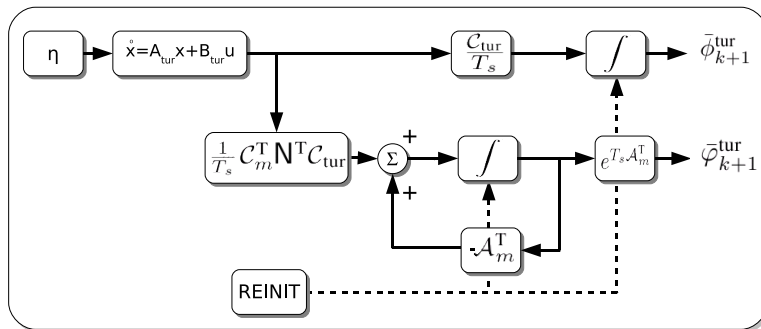


FIG. 6.8 – Schéma-bloc illustrant la procédure d'obtention de la phase moyenne et de la phase moyenne pondérée. Le bloc 'REINIT' remet à zéro les blocs d'intégration toutes les  $T_s$  secondes.

### Discretisation des modèles continus

Un point qui mérite attention spéciale concerne la discrétisation fine des modèles continus. Toute

simulation numérique à temps continu passe par une discrétisation d'autant plus fine que la dynamique des différents processus l'exige. Pour cela des outils à pas variable avec des *solveurs* d'équations différentielles dédiés ont été employés afin d'éviter des erreurs dues à une discrétisation imprécise et conséquente intégration numérique. Ceci aurait comme conséquence la propagation non maîtrisée de cette erreur. La procédure d'obtention de la phase moyenne et de la phase moyenne pondérée est illustrée sur la Fig. 6.8. La structure complète du régulateur LQG est détaillée sur la Fig. 4.3 au chapitre 4.

Les simulations réalisées se montrent très sensibles aux erreurs de discrétisation, notamment celle de la phase moyenne pondérée. Cette composante de l'état est l'intégrale de convolution sur un intervalle de durée  $T_s$  de la phase  $\phi(t)$  par une exponentielle dont l'exposant par construction a toutes ses valeurs propres de module supérieur à 1 ( $\mathcal{A}_m$  étant stable,  $-\mathcal{A}_m$  est forcément anti-stable, donc  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t\mathcal{A}_m} = +\infty$ ). Numériquement, comme l'Eq. (6.60) l'indique, cette intégrale est calculée en deux temps : 1) intégration de la forme  $e^{-t\mathcal{A}_m}$  et 2) multiplication par  $e^{T_s\mathcal{A}_m}$  - Fig. 6.8.

Or, s'il s'agit d'un miroir très rapide, dont les pôles sont à partie réelle négative élevée, le premier terme tend vers l'infini alors que le second tend vers zéro. Cela pose évidemment des soucis de précision numérique. En revanche, pour un MD très lent, la phase moyenne pondérée tend vers la phase moyenne puisque les valeurs propres de  $\mathcal{A}_m$  sont très proches à l'origine et donc  $e^{-t\mathcal{A}_m}$  vaut quasiment 1,  $\forall t > 0$ . Ce cas de figure pose aussi des difficultés puisque la commande optimale soustrait, quelle que soit la dynamique du MD, la phase moyenne de la phase moyenne pondérée. Pour des MD lents une telle différence tend vers zéro à droite donc, encore une fois, une intégration numérique précise est nécessaire.

Pour éviter les difficultés que l'on vient de citer, un logiciel implémentant des solveurs d'équations différentiels a été utilisé. La simple discrétisation exacte et approximation des intégrales par des sommes trapézoïdales s'avère insuffisante.

## 6.6 Calculs analytiques - correction des modes de basculement

Sans perte de généralité,  $p(t)$  est considéré ici comme l'angle équivalent sur le ciel du MD de basculement avec la position de référence.

L'ensemble des simulations réalisées dans cette section n'utilise que des perturbations d'origine atmosphérique. La DSP est représentée sur la Fig. 6.4-gauche. A droite, les courbes d'auto-corrélation des modèles du premier et du second ordre sont ajustés sur les courbes d'auto-corrélation du TT. Par intégration numérique une valeur de  $\approx 30$  mas rms a été trouvée pour le total de la perturbation. Les paramètres de la simulations se trouvent en légende de la Fig. 6.4. La dynamique des deux modes de TT est considérée égale et découplée. Donc la performance en mas rms obtenue à partir des modèles scalaires mono-mode est multipliée par  $\sqrt{2}$  avant présentation finale.

### 6.6.1 Un cas simple : dynamiques du premier ordre

Un premier cas simplifié consiste à ne considérer que des modèles dynamiques du premier ordre et ce pour la perturbation et le MD. Le modèle de perturbation de l'Eq. (6.38) est alors

$$\mathcal{A}_{\text{tur}} = \frac{1}{\lambda}, \quad C_{\text{tur}} = 1. \quad (6.117)$$

Le choix du paramètre  $1/\lambda$  s'effectue selon la procédure détaillée dans la section 6.4.1.

Comme le montre [Correia *et al.*, 2008b], à partir des Eqs.(6.112) et (6.117) les matrices de l'Eq. (4.19) se simplifient de sorte qu'on peut établir des expressions analytiques suivantes

$$\mathcal{A}_d = \begin{pmatrix} e^{\frac{T_s}{\lambda}} 1 & 0 & 0 & 0 \\ (e^{\frac{T_s}{\lambda}} - 1)\lambda & 0 & 0 & 0 \\ \frac{e^{-\frac{T_s}{\tau}}}{T_s(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\tau})} \left( e^{\frac{T_s}{\lambda}} - e^{\frac{T_s}{\tau}} \right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\frac{T_s}{\tau}} \end{pmatrix}, \mathcal{B}_d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \left( 1 - e^{\frac{T_s}{\tau}} \right) \end{pmatrix} \quad (6.118)$$

$$\mathcal{C}_d = \mathbf{D} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{N}{T_s} \left( 1 - e^{-\frac{T_s}{\tau}} \right) \tau & -\frac{N}{T_s} \left( e^{-\frac{T_s}{\tau}} - 1 \right) \tau + 1 \end{pmatrix}, \mathcal{D}_d = 0 \quad (6.119)$$

$$\mathcal{C}^{\text{crit}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.120)$$

La matrice  $\mathcal{A}_d$  étant définie par l'Eq.(6.118), la matrice de covariance du bruit d'état  $\Sigma_v$  dans l'Eq.(6.66) peut être calculée analytiquement.

Soit  $\alpha = e^{\frac{T_s}{\lambda}}$ , alors, à partir de  $\Sigma_\eta$  dans l'Eq.(6.38),  $\beta = (e^{\frac{T_s}{\lambda}} - 1)\lambda$  et  $\gamma = \frac{e^{-\frac{T_s}{\tau}}}{T_s(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\tau})} \left( e^{\frac{T_s}{\lambda}} - e^{\frac{T_s}{\tau}} \right)$ , il vient

$$\Sigma_v = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma & 0 \\ \beta\alpha & \beta^2 & \beta\gamma & 0 \\ \gamma\alpha & \gamma\beta & \gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Sigma_\eta \quad (6.121)$$

### 6.6.1.1 Analyse fréquentielle

Puisque le cas traité ici est en effet un cas scalaire, la matrice de transfert se réduit à une fonction de transfert standard. Les transferts obtenus en s'appuyant sur les résultats de la section 4.3.3 sont présentées sur la Fig. 6.9 pour une valeur de  $\tau/T_s = 10$ . Les régulateurs optimal et sous-optimal définis à la section 6.2.4.

Cette figure permet d'analyser le fonctionnement du régulateur optimal en notant que la DSP de l'erreur temporelle est légèrement au dessous de la DSP de perturbation. Le comportement quelque peu chaotique de la solution optimale près de la fréquence de Nyquist de  $1/(2T_s)$  a comme conséquence une meilleure réjection du couple perturbation + bruit propagés. La section suivante explore une plage plus élargie de variation des paramètres des modèles du MD. L'apport de la commande optimale est ainsi mieux observé.

### 6.6.1.2 Performance optique

Les régulateurs optimaux et sous-optimaux (définis dans la section 6.2.4) sont par la suite implémentés en simulation. La comparaison de performance est représentée sur la Fig. 6.10. [Correia *et al.*, 2009b] montrent des résultats obtenus avec des modèles du premier ordre utilisant l'énergie cohérente comme métrique.

Un régulateur additionnel a été testé. Celui-ci, nommé « intermédiaire », vise à améliorer les performances du régulateur sous-optimal (consistant à projeter l'estimée de la phase sur l'espace miroir). Au contraire de ce dernier, le régulateur intermédiaire prend en compte la dynamique du MD lors de l'estimation de phase uniquement. La commande, en alternative au cas optimal, vise à produire

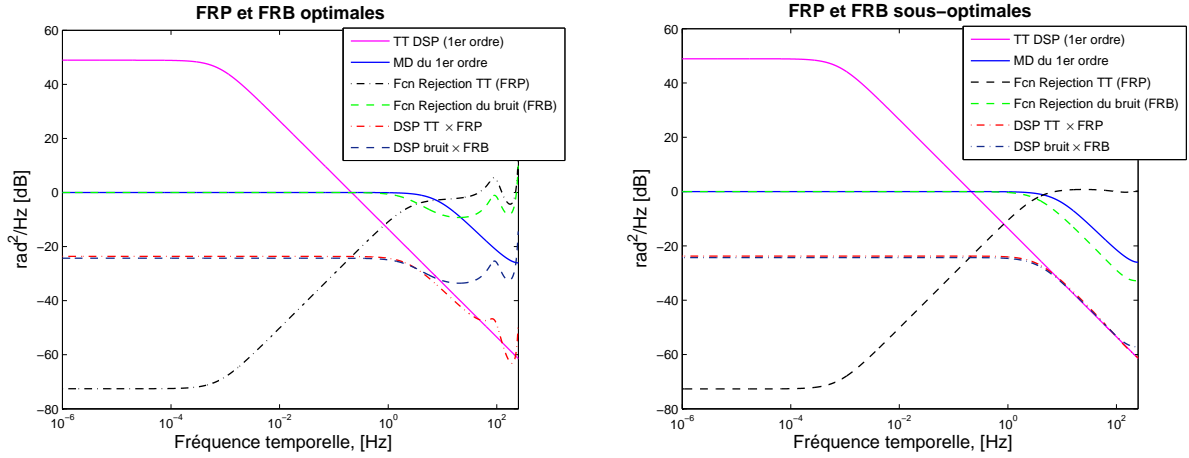


FIG. 6.9 – DSP de la perturbation et du MD face aux fonctions de réjection des régulateurs optimal et sous optimal en boucle fermée pour les modèles du premier ordre. Valeur de  $\tau/T_s = 10$ ,  $T_s = 500\text{Hz}$ .

une phase de correction moyenne de valeur égale à la phase moyenne de perturbation  $\bar{\phi}_{k+1}^{\text{cor}} = \bar{\phi}_{k+1}^{\text{tur}}$ , *i.e.*

$$\frac{1}{T_s} \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} Np(t)dt = \bar{\phi}_{k+1}^{\text{tur}}. \quad (6.122)$$

Ceci conduit à

$$u_k = \frac{\bar{\phi}_{k+1} - \frac{1}{T_s} C_m A_m^{-1} (e^{T_s A_m} - I) x_k}{\frac{1}{T_s} [C_m A_m^{-2} (e^{T_s A_m} - I) B_m - C_m A_m^{-1} B_m T_s]}. \quad (6.123)$$

#### Démonstration : Régulateur « intermédiaire ».

Avec  $p(kT + s)$  exprimé à l'Eq. (6.11), alors

$$\frac{1}{T_s} \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} p(t)dt = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} C_m e^{s A_m} ds x_k + \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} \int_0^t C_m e^{(s-v) A_m} B_m dv ds u_k \quad (6.124)$$

$$= \frac{1}{T_s} C_m A_m^{-1} (e^{T_s A_m} - I) x_k + \frac{1}{T_s} [C_m A_m^{-2} (e^{T_s A_m} - I) B_m - C_m A_m^{-1} B_m T_s] u_k \quad (6.125)$$

Avec  $C_m A_m^{-1} B_m = -I$ , en mettant  $u_k$  en facteur on obtient l'Eq. (6.123). ■

Comme illustré par la Fig. 6.10, la commande optimale est capable d'inverser la dynamique du MD quelle que soit la constante de temps. Deux droites horizontales sont donc observées (en information complète et incomplète). Cependant, pour des MD très lents, la commande peut atteindre des amplitudes assez élevées. Pour des MD dont la constante de temps  $\tau < 0,1\text{s}$ , l'énergie de la commande optimale est comparable à l'énergie de la perturbation (d'où le rapport à 1 sur la Fig. 6.10-droite).

Le régulateur intermédiaire se révèle peu attractif. Vis-à-vis de la performance les gains par rapport à la projection orthogonale de la phase moyenne sur l'espace miroir  $\mathcal{M}$  sont faibles tandis que l'énergie de commande est, dans ce cas, considérablement plus importante pour  $\tau \gtrsim 0,05\text{s}$ . De ce fait, elle ne sera considérée que dans cette section.

Le régulateur sous-optimal n'assure une bonne performance que pour des MD à constante de temps  $\tau < 0,01$ s et ce pour l'information complète et incomplète. Ce comportement aurait pu être lié principalement à l'estimation dégradée de l'état car la dynamique est négligée. Cependant, le régulateur intermédiaire indique qu'une estimation précise sans une étape de commande déterministe aussi précise n'est pas de grande utilité. Négliger la dynamique dans chacune de ces étapes dégrade de manière assez importante la performance.

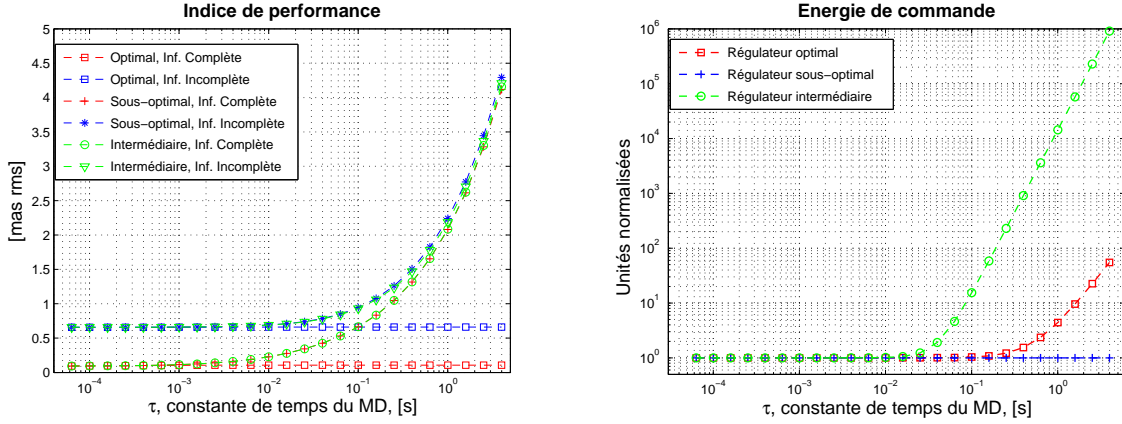


FIG. 6.10 – Gauche : Comparaison de performance pour le régulateur optimal, l'intermédiaire consistant à appliquer une phase de correction moyenne égal à la phase de perturbation sur une trame de durée  $T_s$  et la solution consistant à projeter la phase moyenne  $\bar{\phi}_{k+1}^{\text{tur}}$  sur  $\mathcal{M}$ .

Droite : Énergie de commande normalisée par la variance de la perturbation.

### 6.6.1.3 Robustesse des régulateurs

Un aspect particulièrement important est la robustesse du régulateur par rapport à la connaissance précise de la constante de temps.

La Fig. 6.11 reprend les courbes en information incomplète de la Fig. 6.10 et quatre autres courbes sont rajoutées. Un facteur de 2 et 5 (supérieur/inférieur) sur la constante de temps  $\tau$  est considéré entre le modèle du MD et celui pris pour la synthèse. Pour un facteur de deux, l'écart à la solution nominale (où il y n'a pas d'erreur sur  $\tau$ ) est toujours moindre que celui de la solution sous-optimale. Ce n'est que pour un facteur (dans la pratique impensable) de cinq que la solution optimale se montre moins performante que la solution sous-optimale. Ceci témoigne de la robustesse de la solution optimale vis-à-vis de la constante de temps et de la précision avec laquelle la constante de temps devra être connue.

### 6.6.2 Dynamiques du second ordre (perturbation et MD)

Le modèle de MD pris est maintenant du second ordre avec un facteur d'amortissement  $\xi = 0,01$  et fréquence de résonance  $f_n = 200$ Hz. Une étude paramétrique en fonction de  $\xi$  et  $f_n$  n'est pas menée ici. Ce sera l'objet de la section 6.8 et section 6.9, dans le cadre d'applications spécifiques.

Dans ce qui suit le comportement fréquentiel du régulateur optimal et sous optimal est exploré en détail. Pour cet exemple, la réponse en amplitude est amplifiée d'un facteur de 50 à la fréquence de résonance  $f_r = f_n \sqrt{1 - \xi^2}$ . Il s'agit donc d'un système très peu amorti qui a tendance à osciller à la

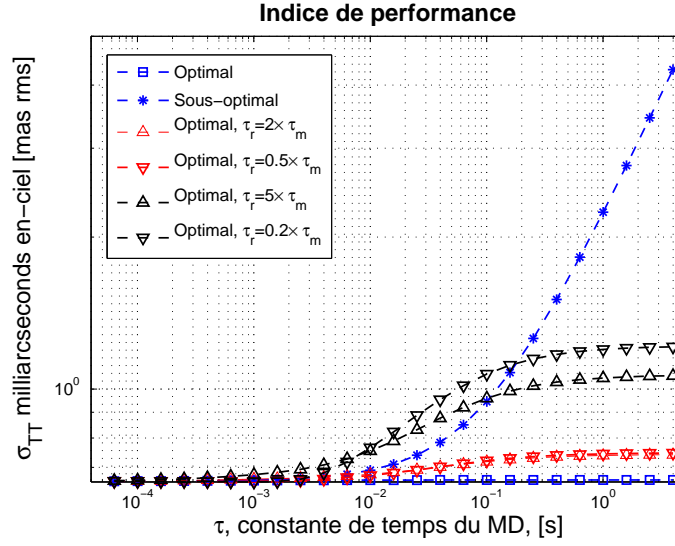


FIG. 6.11 – Variation de la constante de temps d'un facteur de 2 et 5 fois la valeur nominale du modèle du MD pris pour la synthèse du régulateur.

fréquence  $f_r$  avec un taux de dissipation d'énergie très faible. Des amortissements aussi faibles sont caractéristiques des modes propres rigides de structures, dont le MD n'est pas exception.

### 6.6.2.1 Analyse fréquentielle

Identiquement à la section 6.6.1.1, la Fig. (6.12) présente les réponses fréquentielles obtenues. Bien que les FRP soient très semblables pour les deux régulateurs, les FRB diffèrent largement : dans le cas optimal, la FRB rejette fortement le bruit dans des bandes de fréquences pour lesquelles il aurait tendance à subir forte amplification par la résonance du MD (le pic en haut à droite de la Fig. 6.12).

Il est possible d'entrevoir sur la Fig. 6.12 que la réjection de la perturbation apportée par le régulateur optimal est légèrement inférieure à 0dB sur une plage de fréquences située directement au dessous de la bande d'amplification du MD (le pic en haut à droite), ce qui n'est évidemment pas le cas du régulateur sous-optimal.

### 6.6.2.2 Robustesse

Dans le but de tester la robustesse de la solution optimale vis-à-vis de la connaissance précise des paramètres du MD, des variations de  $\pm 10\%$  ont été introduites sur la fréquence naturelle de résonance  $f_n$ . Ce choix n'est pas anodin. Une variation beaucoup trop élevée de ce paramètre entraîne l'instabilité du régulateur. Pour des variations de  $10\%$  autour de la valeur nominale de  $f_n$  les solutions sont garanties stables et assurent une performance nettement supérieure au régulateur sous-optimal. L'analyse de la Fig. 6.11 permet aussi d'inférer qu'une erreur *vers le bas*, c'est-à-dire, prendre une valeur de  $f_n$  inférieur à la vraie fréquence de résonance du DM est moins pénalisant.

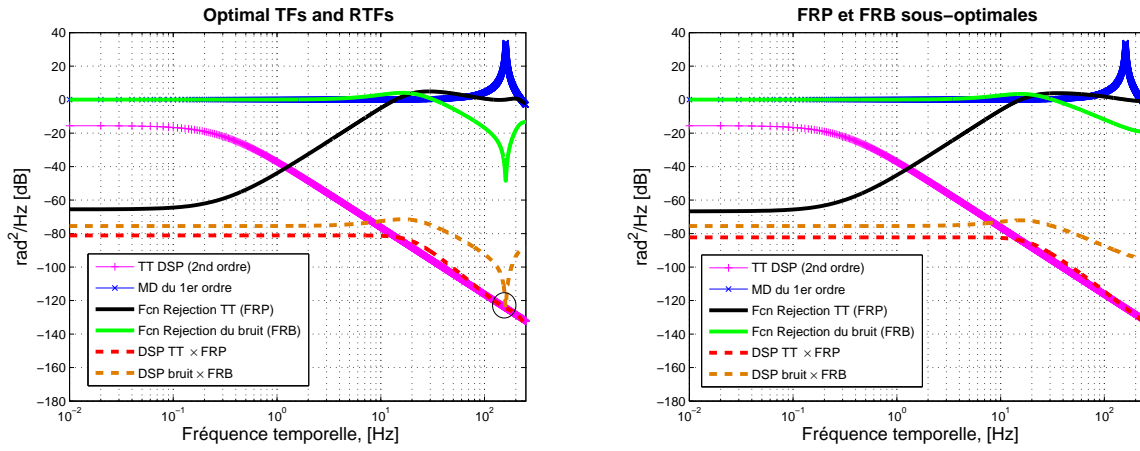


FIG. 6.12 – Réponses fréquentielles de la perturbation et du MD face aux fonctions de réjection des régulateurs optimal et sous optimal en boucle fermée.

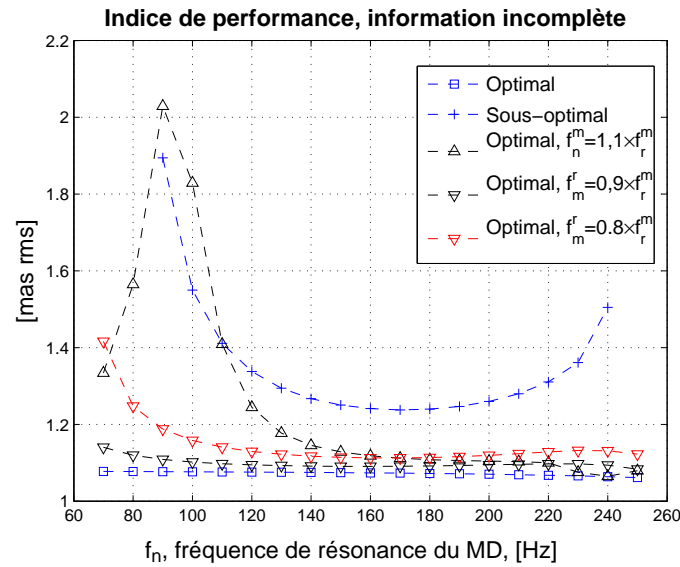


FIG. 6.13 – Variation de la fréquence de résonance naturelle de  $\pm 20\%$  au tour de la valeur nominale prise pour la synthèse du régulateur.



## 6.7 Aperçu général des résultats des articles soumis sur la prise en compte de la dynamique des MD

L'article [Correia *et al.*, 2008b] propose un résultat de commande optimale pour la prise en compte de la dynamique miroir en définissant un modèle d'état qui est non minimal. Dans cet article les observations  $z_k$  coïncident avec les mesures  $y_k$ . Un état à 10 composantes est obtenu, alors que [Correia *et al.*, 2009b] condensent l'état à 8 composantes. C'est d'ailleurs cette dernière version qui est présentée dans ce mémoire. Une dynamique du premier ordre pour la perturbation et la dynamique des MD est analysée. Des courbes de performance en énergie cohérente en fonction de la constante de temps du MD  $y$  sont présentées afin de montrer l'apport de la commande optimale.

[Correia *et al.*, 2010] généralisent ensuite le formalisme aux modèles d'ordre deux et l'utilisent dans le cadre de l'application au ELT Européen où les perturbation sont celles dû au vent, donc de variance bien plus élevée que les perturbation de phase d'origine purement atmosphérique. Ce cas particulier est traité dans la section suivante.

L'article soumis [Correia *et al.*, 2009c] reprend la formulation de l'article précédent en rajoutant une étude de robustesse et des explications supplémentaires sur la commande modale des MD avec dynamique non négligeable. L'innovation par rapport aux cas considérés précédemment est l'inclusion des perturbations dues au vent, déjà discutées à la section 6.4.1, et l'évaluation des erreurs de modélisation au moyen du simulateur Monte Carlo avec série temporelle non issue d'un modèle connu.

Le double correcteur *woofer-tweeter* est traité dans [Correia *et al.*, 2009d], où des dynamiques du premier ordre montrent le concept. Dans ce mémoire l'analyse est généralisée aux dynamiques d'ordre deux puis appliquée au cas de l'instrument NFIRAOS pour le TMT.

## 6.8 Le ELT Européen : dynamiques du second ordre

L'ELT Européen est un télescope adaptatif : sa conception optique inclut en effet plusieurs miroirs pré-focaux [Gilmozzi et Spyromilio, 2008]. Plus précisément le couple M4/M5 est composé d'un miroir avec 5000-7000 actionneurs et d'un miroir, en l'occurrence M5, de stabilisation de champ. Ce miroir plan exécute des mouvements de basculement pour compenser les effets cumulés de la turbulence atmosphérique et de l'impact du vent.

Les modèles à éléments finis actuels ne considèrent pas les supports des miroirs ni l'ensemble de la structure mécanique. Une discussion plus élargie sur la modélisation des composant adaptatifs se trouve dans [Gasmi *et al.*, 2008].

L'ensemble des résultats dans cette section ont fait objet de l'article [Correia *et al.*, 2010]. Les résultats principaux présentés dans le cadre de cet article sont rappelés dans les deux sous-sections suivantes. Les exemples sont présentés pour des modèles de perturbation et MD du second ordre.

### 6.8.1 Simulation avec modèle de perturbation identifié

Pour commencer, supposons que le modèle de perturbation est connu. Autrement dit, la perturbation  $\phi^{\text{tur}}(t)$  dans la Fig. 6.7 est la sortie du modèle linéaire défini par l'Eq. (6.38) et encapsulé par le bloc PERT. Ce modèle est identifié à partir de la DSP temporelle des perturbations dues au vent, représentées sur la Fig. 6.4, selon la procédure détaillée dans la section 6.4.1.

Le régulateur étant synthétisé à partir de ces paramètres identifiés, il s'agit donc d'un cas de cohérence perturbation/modèle pour la commande. Dans cette configuration, les erreurs de modèle ne

sont pas évaluées. Dans l'ensemble des simulations qui se suivent, le temps d'intégration  $T_s = 2$  ms est adopté.

La Fig. 6.14 compare la performance atteinte par le régulateur optimal et sous-optimal et ce pour les calculs analytiques et simulations Monte Carlo. Les valeurs de référence sont  $\xi = 0,01$  pour l'amortissement et  $\delta = 200$  nm rms pour le niveau de bruit aux bords de la pupille du télescope (se référer à la section 2.5.1.1 pour la définition du bruit de mesure).

Pour une série temporelle dont la variance empirique est de 280 mas rms<sup>6</sup>, le régulateur optimal atteint un plateau aux alentours de 3.5 mas rms, pour toute la plage de valeurs de fréquence de résonance  $f_n$  considérée. Ceci représente une réjection d'environ deux ordres de grandeur en amplitude.

Comme attendu, le régulateur sous-optimal présente une performance moins impressionnante qui varie de 4 à 6,5 mas rms. De plus, un point remarquable concerne la stabilité. Elle est limitée à la région  $f_n \in [100 - 220]$  Hz. Comme on pouvait s'y attendre, pour le régime stable les calculs analytiques et la simulation Monte Carlo donnent des résultats quasi identiques.

L'amélioration de performances obtenue par le régulateur optimal a deux origines : 1) du côté de l'observateur la dynamique est prise en compte, résultant en une estimation de l'état plus précise et rigoureuse et 2) la commande optimale, partant de la connaissance de la dynamique du MD, utilise en plus de  $\bar{\phi}_{k+1}$ , la phase moyenne pondérée  $\bar{\varphi}_{k+1}$  et l'état interne du MD  $x^m$  afin de minimiser l'écart à tout instant entre la perturbation et la déformation du MD. Un comportement oscillatoire peut ainsi être pris en compte et les oscillations fortement atténuées. Puisque le régulateur intermédiaire établi à la section 6.6 vis-à-vis du régulateur sous-optimal ne représente pas une amélioration significative des performances, ceci renforce l'usage de la solution optimale en détriment de solutions plus simples. La comparaison se fait uniquement entre la solution optimale et sous-optimale, consistant, on le rappelle, à négliger totalement la dynamique du MD.

### 6.8.2 Série temporelle indépendante du modèle

Soit maintenant le cas incohérent. La perturbation prise pour entrée n'est pas issue d'un modèle, au moins d'un modèle connu. C'est une série temporelle dont l'acronyme, pour commodité, sera WB pour *wind buffeting*. Se référer à la section 6.5 pour plus de détails sur l'utilisation du simulateur dans ce scénario.

Les paramètres utilisés pour la construction du modèle pour la commande sont identifiés à partir des DSP de la perturbation (représentée sur la Fig. 6.4) et modèle du MD comme cela a été détaillé dans la section 6.4.1. La différence est que la série en entrée reste celle original et non la série identifiée. Cette configuration permettra d'évaluer les erreurs de modélisation de la perturbation en plus des erreurs temporelle et d'estimation. La Fig. 6.15 présente, pour deux niveaux de bruit, la performance du régulateur optimal.

Les erreurs de modélisation rajoutent approximativement 0,5 et 1 mas rms pour le cas  $\delta = 200$  nm rms et  $\delta = 800$  nm rms respectivement. Ces résultats suggèrent que les paramètres du modèle de perturbation ont été choisis de manière judicieuse puisque la contribution de cette dernière erreur aux précédentes est faible.

Afin de s'assurer du bon choix des paramètres du modèle de perturbation proposé dans la section 6.4.1, deux autres modèles de perturbation ont été choisis avec des facteurs de décorrélation de 1/5 et 5 fois le modèle nominal trouvés pour  $5 \times T_s$ .

---

<sup>6</sup>Simulation ESO [Sedghi, 2007].

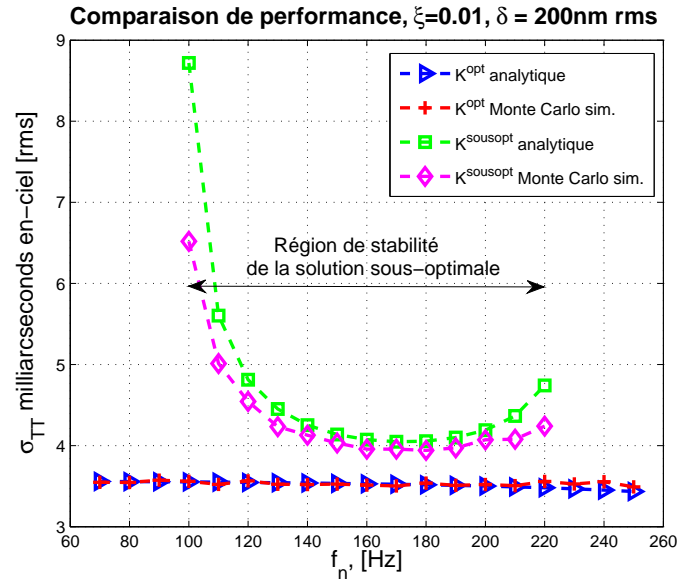


FIG. 6.14 – Comparaison de performance des régulateurs optimal et sous-optimal. Résultats issus de calculs analytiques et simulations Monte Carlo (sans erreur de modèle pour l’instant). La solution optimale est stable pour toute la plage de valeurs de fréquence de résonance considérée tandis que la stabilité de la solution sous-optimale est restreinte aux fréquences  $f_n \in [100, 200]$  Hz. La courbe rouge avec des croix est la même que sur les Figs. 6.15 et 6.16.

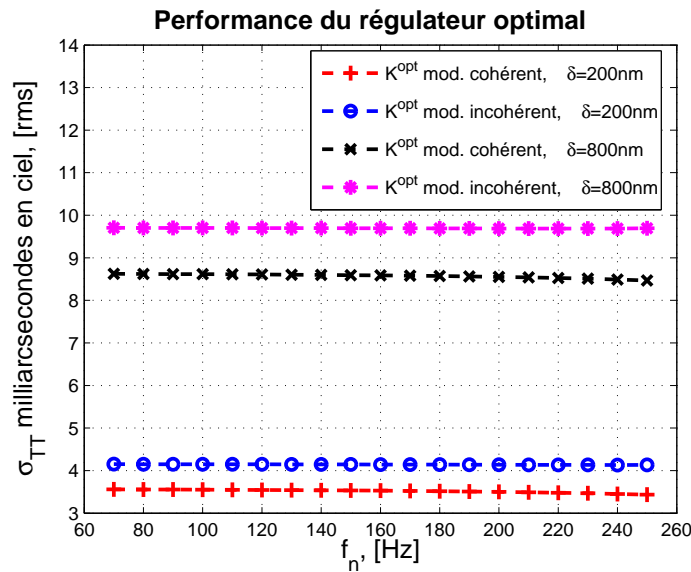


FIG. 6.15 – Performances du régulateur optimal pour deux niveaux de bruit obtenues par simulation Monte Carlo sur 90 secondes.

La Fig. 6.16 présente les résultats de performance obtenus. Dans les deux scénarios une erreur additionnelle est commise, ce qui confirme le choix initial, dit nominal.

En outre, étant donné qu'une variation importante de performance est observée selon le modèle de perturbation considéré, ceci souligne clairement l'importance de connaître, avec une bonne précision, les paramètres de la perturbation afin de synthétiser un régulateur performant.

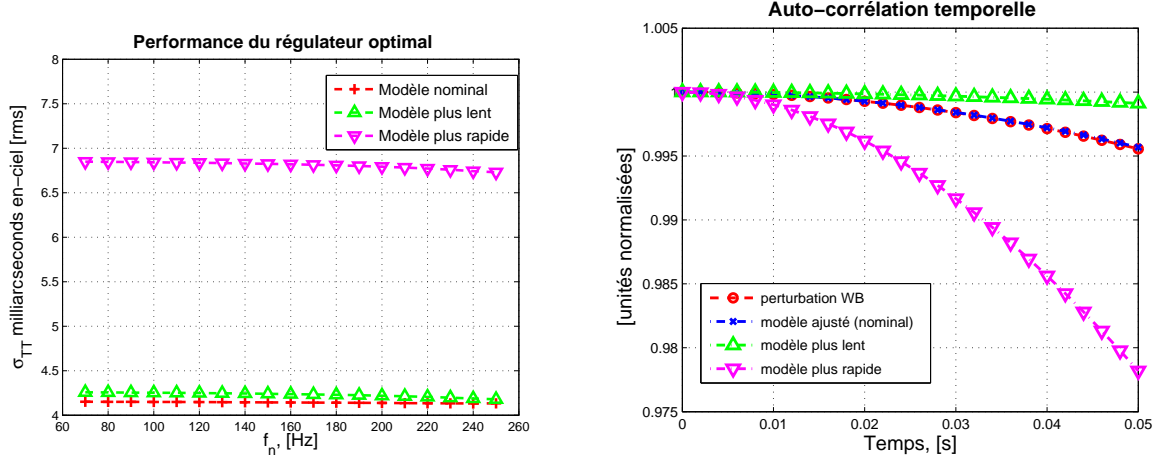


FIG. 6.16 – Comportement du régulateur optimal en fonction des paramètres choisis pour le modèle de perturbation. Gauche : performance en mas rms. Droite : courbes d'auto-corrélation des modèles pris pour la synthèse. Le modèle nominal garantit l'erreur minimale.

## 6.9 NFIRAOS, woofer-tweeter pour le TMT

Le système NFIRAOS du TMT est composé d'un miroir déformable conjugué du sol avec 60 actionneurs [Herriot *et al.*, 2005, Herriot *et al.*, 2006]. Ce miroir est installé sur une plate-forme tournante sur deux axes perpendiculaires. La plate-forme, avec une bande passante de l'ordre de 20 Hz fait office de woofer, puisque les modes du TT sont déchargés du MD vers celle-ci. Les caractéristiques dynamiques du woofer ne permettant pas de corriger la totalité du TT (atmosphérique ou autre), il faut une commande coordonnée des deux composants pour obtenir la meilleure correction. Puisque le tweeter présente une limitation de course, l'objectif est de décharger autant que possible le TT sur le woofer.

[Véran et Herriot, 2006] proposent un régulateur basé sur un double intégrateur pour réduire au mieux le TT résiduel après correction par le woofer. La boucle fermée est stable (les gains sont ajustés en conséquence) et ce régulateur permet une forte atténuation de la perturbation.

Le système NFIRAOS s'inscrit tout naturellement dans la problématique présentée à la section 6.3 sur le woofer-tweeter, puisque le tweeter peut être considéré infiniment rapide alors que le woofer souffre d'une dynamique temporelle du second ordre. Pour ce cas de figure, la fonction de transfert du woofer est

$$H_w(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}, \quad (6.126)$$

avec  $\omega_0 = 2\pi 14$  rad/s et  $\xi = 0,35$ . La valeur de l'amortissement étant  $\xi < \sqrt{2}/2$  indique qu'une fréquence de résonance est observable - Fig. 6.17-droite.

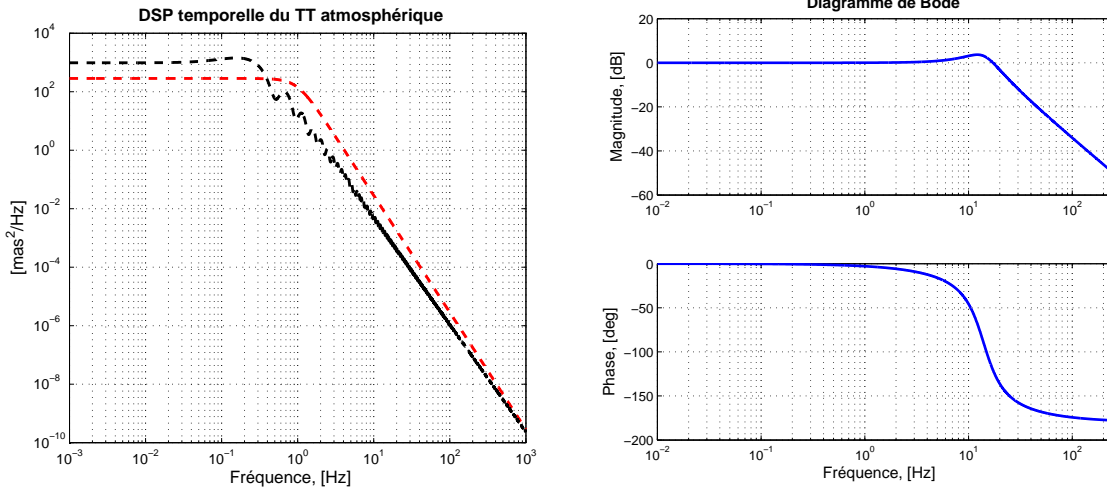


FIG. 6.17 – Gauche : DSP du TT atmosphérique et du TT induit par le vent (considéré comme la sortie d'un modèle du second ordre dont les paramètres sont connus). Respectivement 21 et 25 mas rms de perturbation totale.

Droite : Diagramme de Bode du woofer du système NFIRAOS. Une faible résonance d'un facteur 1,525 est observable à la fréquence  $f_r = 13,1$  Hz.

La perturbation de phase considérée est conforme à celle prise par [Véran et Herriot, 2006] avec DSP sur la Fig. 6.17-gauche définie par un filtre du second ordre avec  $\omega_0^{\text{tur}} = 1$  Hz et  $\xi^{\text{tur}} = 0,71$  (ne pas confondre ce modèle du second ordre pour la perturbation avec le modèle du second ordre de la dynamique du MD). A partir de ces paramètres le modèle stochastique de l'Eq. (6.38) est totalement défini.

Le TT résiduel calculé comporte deux composantes : l'une due à la phase résiduelle et autre due à la propagation du bruit au travers de la boucle d'asservissement, comme cela a été expliqué à la section 2.8. Sur la Fig. 6.18, l'évolution du TT résiduel en fonction du bruit de mesure pour différents temps de trame  $T_s$  est visualisée.

Ces résultats sont à comparer à ceux de [Véran et Herriot, 2006] avec une différence significative : le terme de propagation de bruit, qui joue un rôle crucial et contribue pour une part non négligeable du budget total d'erreur. On constate que l'erreur est inférieure à 1 mas rms pour des fréquences de trame supérieures à 400 Hz et ce pour des niveaux de bruit de 40-60 nm aux bords de la pupille.

Sur la Fig. 6.19 sont représentées les trajectoires temporelles du woofer-tweeter de NFIRAOS. Elles ont été obtenues pour un rapport d'énergie de commande de 10, soit  $\mathbf{E}_n(u^w) = 10 \mathbf{E}_n(u^t)$ .

Un avantage de l'approche optimale est qu'elle permet aisément de définir un seuil pour la course maximale du tweeter (sous l'hypothèse qu'entre commande et course il y a une relation linéaire). Le régulateur ainsi déterminé fera la répartition des charges de façon à respecter les contraintes de course imposées.

Des saturations soit sur la course soit sur l'amplitude de la commande  $u$  n'ont pas été traitées dans ces travaux. [Kulcsár et al., 2008] montre que ces contraintes peuvent aussi être incorporées dans l'approche LQG avec des bénéfices en performance considérables.

Un résultat remarquable est obtenu en appliquant un rapport de commande variable au woofer et au tweeter. La Fig. 6.19-droite montre précisément que la présence du tweeter permet en effet de

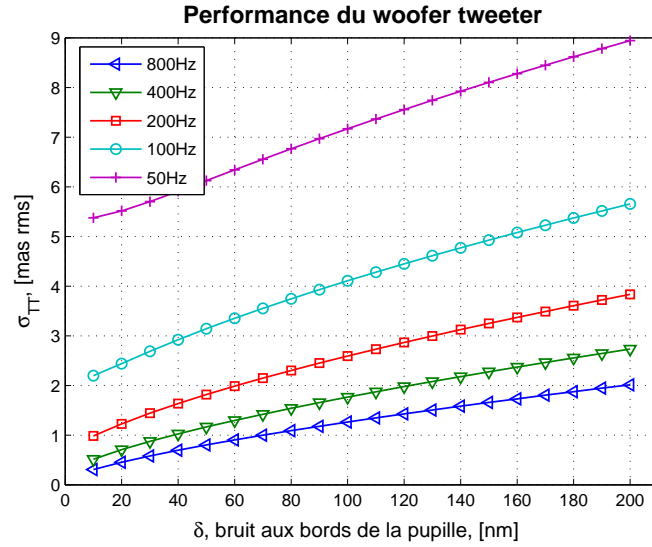


FIG. 6.18 – TT résiduel en mas rms en fonction du bruit de mesure aux bords de la pupille, pour différentes valeurs de  $T_s$  de 1/50s à 1/800s.

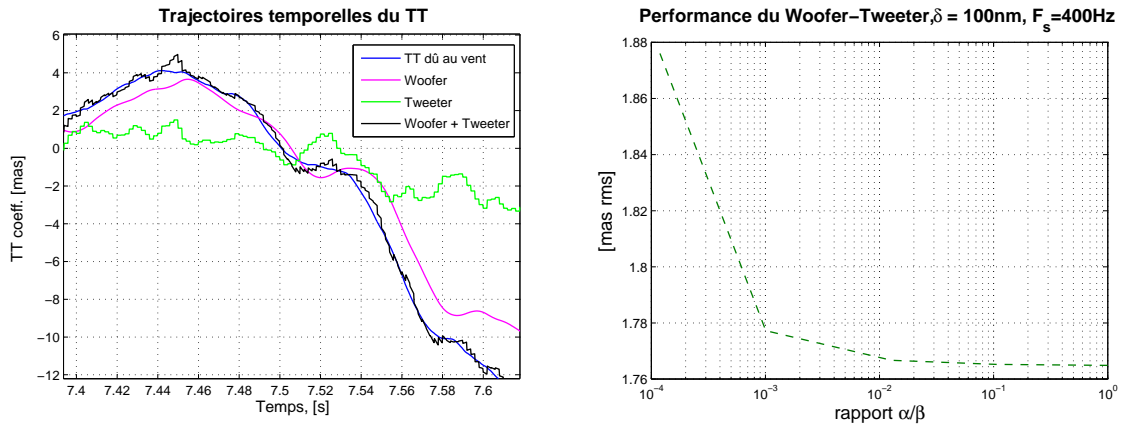


FIG. 6.19 – Gauche : Trajectoires temporelles du woofer-tweeter de NFIRAOS. Bruit  $\delta = 100\text{nm}$  rms aux bords de la pupille. Rapport  $\gamma/\beta=10$ , expliqué dans le texte. Droite : performance en fonction du rapport de  $\alpha/\beta$ .

monter en performance : en balayant le rapport  $\alpha/\beta \in [10^{-4}, 1]$ , une variation de 0,1 milliarcseconde est observée (pour une perturbation avec un total de 21 mas rms sur la Fig. 6.17-gauche).

Une approche similaire pourrait être appliquée au double correcteur M4-M5 prévu pour l'ELT Européen [Vernet *et al.*, 2008]. Le miroir quaternaire joue le rôle du tweeter avec ses 6000-8000 actionneurs tandis que M5 est un miroir plan de stabilisation de champ. Ce serait l'étape suivante de l'analyse présentée à la section 6.8 où, les perturbations dues au vent sont très intenses [Hubin *et al.*, 2007]. L'apport d'une commande spécifiquement adaptée est d'autant plus important que les enjeux en stabilité et performance sont ambitieux.

## 6.10 Bilan et discussion

Le problème de commande optimale à variance minimale en présence de MD avec dynamique a été présenté. Ce problème a été résolu dans le cadre de l'approche LQG, où on a pu généraliser de façon tractable la solution du cas infiniment rapide aux MD avec dynamique linéaire du premier et du second ordre. Une approche modale a été suivie, car les modèles à éléments finis actuels suggèrent que la dynamique des MD n'est associée qu'à un ensemble réduit de modes propres. Une structure de commande optimale pour modes lents et modes rapides dont la dynamique peut être négligée a donc été proposée. L'extension de la solution aux correcteurs à double étage a de plus montré la souplesse de l'approche qui peut s'étendre à plusieurs MD avec des caractéristiques dynamiques différentes.

L'efficacité de la commande optimale a été validée par les résultats obtenus en simulation. La solution optimale assure une variance de phase résiduelle minimale, avec des gains de stabilité en boucle fermée qui lui permettent d'être envisagée pour une famille de problèmes plus élargie.

En comparaison à la solution sous-optimale consistant à projeter orthogonalement la phase moyenne sur l'espace miroir, la supériorité de la solution optimale a été nettement illustrée grâce aux résultats analytiques et de simulations Monte Carlo. La robustesse de la solution optimale confirme l'attractivité de la méthode, puisqu'une méconnaissance des paramètres aux alentours de ses valeurs nominales (de plus d'un facteur 2 pour la constante de temps et de  $\pm 10\%$  pour la fréquence de résonance) n'entraîne ni la déstabilisation du régulateur ni des pertes en performance au-delà de ce que l'on obtiendrait avec la solution sous-optimale.

Les résultats issus du simulateur Monte Carlo corroborent la procédure de choix de paramètres du modèle de perturbation : un écart face aux paramètres nominaux augmente les pertes de performance.

Une intuition préalable sort aussi renforcée : la dynamique étant bien gérée par la commande optimale, une relaxation des contraintes de fabrication des MD peut être envisagée, un résultat particulièrement intéressant pour les constructeurs engagés dans la mise en œuvre de MD pour les ELT.

Néanmoins, la caractérisation des éléments requis pour la synthèse de la commande optimale, notamment des spectres de perturbation et de modèles de la dynamique des MD valables au-delà des fréquences d'actuation envisagées (plusieurs centaines de Hertz) sont à l'heure actuelle rares. Pour pallier ce manque d'information, une possibilité logique est d'instrumentaliser les composants dans le but de superviser leur comportement et ainsi fournir les moyens d'adapter le régulateur en ligne.



## Chapitre 7

# Conclusions et perspectives

### Conclusion générale

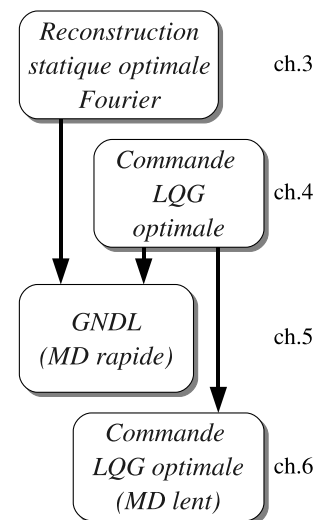
La conception de télescopes de tailles de l'ordre de 30-50m repose sur la possibilité de s'affranchir de la principale limitation physique ayant un impact sur les images acquises : l'atmosphère terrestre. Pour cela, des systèmes d'optique adaptative post-focaux furent tout d'abord proposés et maintenant les télescopes deviennent adaptatifs en eux-mêmes.

La conception de systèmes d'OA pour de tels télescopes présente de nouveaux enjeux auxquels ils sont confrontés aujourd'hui. Toute une nouvelle gamme de concepts d'OA est à l'étude visant des objectifs scientifiques divers : l'évolution et morphologie des galaxies a motivé la conception d'OA grand champ ; l'identification et étude des propriétés de planètes extra-solaires, a motivé la conception de systèmes d'OA à haute dynamique. Ces nouveaux concepts sont plus complexes et font appel à des composants de plus grandes dimensions physiques et avec un plus grand nombre de degrés de liberté (GNDL) pour affiner la correction. Le nombre de degrés de liberté de ces nouveaux systèmes est de trois à cinq ordres de grandeur plus important que sur les systèmes actuels.

Le travail de thèse présenté dans ce mémoire a pour objectif de traiter le problème de commande multivariable en temps réel de ces systèmes. Dans ce but, des stratégies qui se penchent à la fois sur l'aspect GNDL et à la fois sur la dynamique temporelle des composants actifs ont été proposées. Le problème de commande des OA étant à multiples facettes, ces deux aspects ont été traités de manière séparée.

Ainsi, le formalisme général de reconstruction et commande en OA optimisant le rapport de Strehl a été reformulé, en s'appuyant sur des résultats récents dans le domaine. La démarche globale est visualisée sur la figure ci-contre.

Dans un premier temps, le chapitre 3 aborde le problème de reconstruction statique par des approches Fourier. On propose un cadre théorique pour présenter de façon unifiée les différentes approches (filtres et méthodes d'extension). On propose notamment une nouvelle modélisation « exacte » du problème direct (consistant à définir l'équation de mesure propre de l'analyseur Hartmann-Shack (HS), plus précisément les gradients de phase) dans le domaine des fréquences spatiales. Concernant l'adaptation de la pupille annulaire des télescopes à l'utilisation de la





transformée de Fourier rapide on propose dans [Correia *et al.*, 2007] des méthodes d'extension issues des contraintes physiques imposées par les hypothèses de phase périodique et à bande fréquentielle limitée. Toujours dans cette perspective, une méthode d'extension itérative utilisant des transformées de Fourier (TF) à été proposée dans [Correia *et al.*, 2008a]; cette méthode est basée sur une modification de l'algorithme d'extrapolation spectrale de Gerchberg. Elle est applicable à toutes les configurations simplificatrices du HS et s'avère la plus robuste; elle tend de plus à se comporter plus avantageusement en faible flux, en présence d'obstruction centrale du télescope et en termes de structure de la FEP longue pose. Cependant, le nombre total d'opérations est accru malgré l'utilisation de la TF rapide. Néanmoins, la méthode de reconstruction de front d'onde étudiée réduit en effet la complexité calculatoire de  $O(n^2)$  des algorithmes classiques consistant à multiplier le vecteur de mesures par une matrice de commande en  $O(n \log(n))$  grâce à l'utilisation des TF rapides.

L'étude comparative menée en boucle ouverte par simulations de Monte Carlo a permis la caractérisation de la performance optique de cette méthode de reconstruction en fonction de l'extension, du filtre restructeur, de la magnitude de l'étoile guide et du pourcentage d'obstruction centrale. De plus, les performances ont été comparées à celles des méthodes classiques. En employant des modèles moins fins que ceux des méthodes classiques et malgré l'extension des pentes en dehors de la pupille, la différence en rapport de Strehl à  $2,2\mu\text{m}$  s'élève au maximum à 5% vis-à-vis des méthodes classiques et ce pour toutes les combinaisons de filtre/extension testées.

L'adaptation au fonctionnement en boucle fermée a été analysée. On a plus précisément proposé l'utilisation d'un intégrateur avec modification soignée des *a priori* pour ce régime d'opération.

L'étude réalisée en collaboration avec l'Observatoire d'Arcetri a abouti à la première utilisation des méthodes Fourier avec l'analyseur à pyramide. Les résultats ont été rassemblés dans le travail conjoint avec [Quirós-Pacheco *et al.*, 2009].

Un contexte d'utilisation envisageable des « restructeurs Fourier » sont les systèmes à haute dynamique : c'est le cas de l'instrument GPI qui sera installé prochainement sur le télescope Gemini et à plus long terme, cela concerne aussi l'instrument EPICS en cours de conception pour le futur ELT Européen.

Cependant, la reconstruction statique de front d'onde associée au régulateur à action intégrale ne sont bien-sûr pas optimaux vis-à-vis du rapport de Strehl.

On s'est intéressé ensuite aux méthodes d'estimation dynamiques de la phase et de commande en boucle fermée. La commande optimale de type Linéaire-Quadratique-Gaussien (LQG) en OA établi dans les travaux menés par l'ONERA et le laboratoire L2TI (Univ. Paris 13) a été simplifiée au chapitre 4 en vue de l'application aux systèmes à grand nombre de degrés de liberté (GNDL).

L'approche LQG utilise un formalisme d'état pour décrire l'ensemble de la dynamique du système. Les modèles d'évolution temporelle de phase sur lesquels s'appuie la solution optimale ont été revisités. Un formalisme pour le choix de paramètres des modèles auto régressifs a été établie; ces paramètres doivent être choisis de telle sorte que le voisinage de zéro de la courbe d'autocorrélation s'ajuste au mieux à celle théorique et/ou mesurée. On constate que le choix réalisé par [Le Roux *et al.*, 2004] et [Petit, 2006] consistant à ajuster la décorrélation à  $1/e$  du temps de cohérence de chaque polynôme de Zernike est proche de l'option que l'on propose; cela justifie le comportement fiable observé lors de simulations numériques et en application expérimentale.

Le formalisme d'état a permis de réinterpréter d'autres méthodes alternatives de commande, notamment l'intégrateur, le POLC et le *FrIM+IMC*. Ceci avait pour objectif de mettre en évidence leurs avantages et inconvénients, plus précisément en ce qui concerne la perte d'optimalité en faible RSB.

La réduction de la complexité des opérations de la commande LQG hors ligne et temps réel a été abordée au chapitre 5. Une première tentative de réduction du coût de calcul consiste à simplifier la résolution de l'équation de Riccati d'estimation hors ligne. En revenant sur la modélisation du chapitre 3, une représentation creuse a été proposée pour les opérateurs intervenant dans la commande LQG permettant également de gagner sur le calcul en ligne. L'écriture de la solution optimale a été ensuite adaptée à l'utilisation de méthodes numériques itératives rapides. Pour cela il a fallu approximer la solution de l'équation de Riccati qui a été remplacée par un opérateur spectral creux ; ceci évite donc de résoudre la Riccati et rend effectivement compte de la régularisation du problème.

[Correia *et al.*, 2009a] présentent une étude comparative des représentations classiques et creuses (sans approximations). Comme première observation, on constate que la performance en rapport de Strehl n'est pas modifiée par la modélisation en base zonale et qu'elle tend même à s'améliorer. Ceci est dû au fait que le conditionnement des opérateurs linéaires creux est plus avantageux du point de vue numérique que l'utilisation classique des polynômes de Zernike. Deuxièmement, l'approximation de la solution de la Riccati d'estimation par un opérateur spectral motive alors l'utilisation d'une méthode itérative pré-conditionnée en espace de Fourier. Pour cela les propriétés exploitées au chapitre 3 ont été encore une fois mises à profit pour aboutir à l'algorithme de la commande LQG avec mise en place des gradients conjuguées pré-conditionnés en Fourier (LQG-FD-PCG).

Les résultats de simulation en boucle fermée sont très encourageants car les pertes engendrées par les différentes approximations se chiffrent au dessous de 1% en SR, pour un système d'OA classique.

Grâce à l'utilisation des FT rapides, ces algorithmes présentent une complexité de  $O(n \log(n))$ , donc assez attractifs surtout pour les OA des futurs ELT.

Enfin au chapitre 6 l'hypothèse sur la rapidité infinie des miroirs déformables a été relâchée. Autrement dit, le nouveau problème de commande optimale pour une boucle d'OA avec des miroirs lents a été étudié.

En ramenant le traitement à une synthèse LQG discrète standard, on a démontré l'équivalence entre problème à temps continu et à temps discret. Une solution générale à variance minimale a été formulée dans le cadre de cette approche.

On a étudié un cas particulier de miroir pré-focal pour l'E-ELT, plus précisément le miroir quaternaire adaptatif. Les perturbations considérées sont celles dues à l'impact du vent sur la structure, deux à trois ordres de grandeur plus importantes que les perturbations d'origine purement atmosphérique.

Dans un premier temps, des miroirs avec une dynamique du premier ordre découplée ont été étudiés (voir [Correia *et al.*, 2008a] et [Correia *et al.*, 2009b]). Ensuite l'analyse pour des miroirs résonants a été effectuée. Les résultats de performance, stabilité et robustesse vis-à-vis de la connaissance des paramètres a fait l'objet de la publication [Correia *et al.*, 2010], pour des miroirs fortement oscillants.

Les résultats analytiques et de simulations de Monte Carlo ont de plus confirmé le choix plus performant des paramètres des modèles AR proposé au chapitre 4 ; on a aussi mis en évidence la précision avec laquelle les paramètres de la turbulence et du miroir doivent être connus.

La nouvelle solution optimale a été comparée à la commande négligeant la dynamique du MD. Elle s'avère plus performante, plus stable et plus robuste. Selon le cas applicatif, elle s'avère même indispensable. On souligne que le traitement formel du problème de commande des OA à variance minimale avec dynamique du miroir permet de relâcher les contraintes imposées aux constructeurs de miroirs déformables, car une partie de la dynamique interne peut être gérée de façon optimale au niveau de la commande.

Finalement, le formalisme a été étendu afin d'accommoder un double correcteur, communément dénommé *woofer-tweeter*. Ce type de correcteur ont, en générale, une partie de leur espace de correction en commun. La répartition de la commande devient ainsi un problème mal posé et non trivial à résoudre. La commande LQG avec pénalisations sur les commandes permet de gérer de façon optimale la répartition spatio-temporelle de l'effort de commande en tenant compte des caractéristiques dynamiques tant temporelles que spatiales des miroirs. Cela évite en effet de traiter le problème de manière sous-optimale en appliquant une répartition trop restrictive par exemple sur la séparation des fréquences spatiales de correction.

Le cas particulier du WT en étude pour l'instrument NFIRAOS du projet TMT (télescope de 30 m) a été analysé. Le filtrage optimal du bruit et l'atténuation optimale de la perturbation font que les résultats obtenus pour cette stratégie de commande sont nettement supérieurs aux approches basées sur le régulateur intégrateur et double intégrateur.

## Perspectives

L'ensemble des travaux présentés dans ce mémoire de thèse soulèvent plusieurs questions et pointent différentes directions de recherche toujours dans la visée des ELT.

Tout d'abord, l'algorithme de reconstruction dans l'espace des fréquences spatiales présenté et optimisé au chapitre 3 doit encore subir des améliorations supplémentaires pour le rendre au moins aussi performant (au niveau optique) que les méthodes classiques de reconstruction. Dans un premier axe, une possibilité concerne la réduction de la complexité du nouveau algorithme d'extrapolation spectrale ou dans un deuxième axe d'améliorer la performance des méthodes d'extension plus simples notamment pour les OA avec forte occultation centrale. Récemment, une approche qui combine la base de Fourier avec une commande LQG a été proposée par [Poyneer *et al.*, 2007]. Une autre direction de recherche vise à établir la solution optimale en tenant compte du repliement de phase, un travail déjà poursuivi par l'équipe dans laquelle ces travaux de thèse ont été menés.

Le banc *High-order test bench* (HOT) installé à l'ESO permettra à court terme de tester et comparer expérimentalement les approches Fourier tant pour l'analyseur HS que pyramide.

L'étude théorique pourra se poursuivre en généralisant l'algorithme aux OA tomographiques, tout en tenant compte de la pupille finie du télescope. Ces travaux sont considérés essentiels pour les prochains instruments scientifiques de l'ère VLT tels que le projet SPHERE et de l'ère ELT.

L'approche LQG itérative décrite au chapitre 4 et adaptée aux GNDL au chapitre 5 présente encore un caractère exploratoire. Elle pointe déjà une direction complémentaire à d'autres stratégies sous-optimales de commande issues de problèmes de reconstruction statique en boucle ouverte. L'approfondissement de la commande LQG pour les GNDL peut se poursuivre par l'optimisation et évaluation des approximations des opérateurs linéaires qui ont été proposées ici. L'extension de ces travaux aux OA tomographiques reste un travail à mener. Méthodes numériques héritées des problèmes rencontrés en météorologie (plus précisément modèles GNDL pour la prévision du temps, *etc.*), tels que les algorithmes quasi-Newton peuvent être envisagés à court terme.

Un cadre expérimental où l'approche proposée dans ce mémoire pourrait s'appliquer est la commande de systèmes d'OA extrême pour le VLT, notamment sur la version optimisée l'instrument *SPHERE upgraded*.

L'étude originale de la commande à variance minimale pour les systèmes d'OA à MD de

dynamique non négligeable, répond à nombre de questions concernant la mise en œuvre des ELT. De même, elle soulève aussi d'autres questions.

La commande modale proposée étant générale, elle doit maintenant être simulée avec un plus grand nombre de modes ; les couplages inter-modes doivent être pris en compte. Une stratégie intégrée de commande de modes lents et rapides devra être proposée.

A l'heure actuelle, les deux études sur lesquelles la solution optimale a été particularisée, plus précisément le couple M4/M5 du futur E-ELT et le système NFIRAOS du TMT, pourront bénéficier de la généralisation de la stratégie. Toutefois d'autres approfondissements sont nécessaires.

A plus court terme, la caractérisation des modèles de perturbation et de MD aux échelles de temps visées par l'application doit être réalisée. Un effort conséquent doit donc être apporté sur ce point.

A moyen terme de banc du projet CHAPERSONA permettra de fonctionner avec un MD forcé en dynamique non négligeable.

A plus long terme, une implantation expérimentale sur des bancs optiques démonstrateurs du concept WT pour les ELT est envisageable.



# Chapitre 8

## Annexes

### 8.1 Propriétés utiles

**Lemme 8.1** *Exponentielle d'une matrice.*

Pour toute matrice  $A$  inversible,  $\forall t \geq 0$

$$e^{tA} = \sum_{n \geq 0} \frac{A^n t^n}{n!} \quad (8.1)$$

□

**Lemme 8.2** *Intégrale de l'exponentielle d'une matrice.*

Pour toute matrice  $A$  inversible et  $\forall t \geq 0$  [van Loan, 1978]

$$\int_0^t e^{sA} ds = A^{-1} (e^{tA} - I) = (e^{tA} - I) A^{-1} \quad (8.2)$$

□

**Lemme 8.3** Soit  $Q \geq 0$  et  $R > 0$

$$\begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix} > 0 \Leftrightarrow Q - SR^{-1}S^T > 0 \quad (8.3)$$

□

**Lemme 8.4** Soit  $x$  une variable aléatoire hilbertienne de matrice de covariance  $\Sigma_x$  et  $Q \geq 0$ . Alors

$$E \{x^T Q x\} = \text{trace}(Q \Sigma_x) \quad (8.4)$$

où  $E\{\cdot\}$  représente espérance mathématique.

□

**Lemme 8.5** Soit  $v_k, \forall k \geq 0$  un bruit blanc Gaussien discret, c'est-à-dire une séquence i.i.d. de variables Gaussiennes centrées et de variance  $\Sigma_{v,k} \geq 0$ . Soit  $x_0$  une variable Gaussienne indépendante de  $v$ , et  $x_k, \forall k \geq 0$  le processus aléatoire défini par l'équation de récurrence

$$x_{k+1} = Ax_k + v_k \quad (8.5)$$

Alors, pour tout  $k \geq 0$  la variance  $\Sigma_{x,k}$  vérifie l'équation de Lyapunov discrète

$$\Sigma_{x,k+1} = A\Sigma_{x,k}A^T + \Sigma_{v,k} \quad (8.6)$$

De plus, si  $A$  est une matrice de stabilité (c'est-à-dire si elle a toutes ses valeurs propres de module  $< 1$ ),  $\Sigma_{x,k}$  converge (à vitesse exponentielle) vers la solution  $\Sigma_{x,\infty}$  de l'équation algébrique de Lyapunov discrète

$$\Sigma_{x,\infty} = A\Sigma_{x,\infty}A^T + \Sigma_v \quad (8.7)$$

□

**Lemme 8.6** Soit  $v_k, \forall k \geq 0$  un bruit blanc Gaussien discret et  $A$  une matrice de stabilité discrète. Soit  $x_0$  une variable Gaussienne indépendante de  $v$ , et  $x_k, \forall k \geq 0$  le processus aléatoire défini par l'équation de récurrence

$$x_{k+1} = Ax_k + v_k \quad (8.8)$$

Soit par ailleurs  $Q \geq 0$  et

$$J^d = \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x_k^T Q x_k \quad (8.9)$$

Alors

$$J^d \stackrel{p.s.}{=} \text{trace}(Q\Sigma_{x,\infty}) \quad (8.10)$$

où  $\Sigma_{x,\infty}$  est la solution de l'équation de Lyapunov (8.6). □

Un solveur d'équations différentielles peut donc être utilisé pour évaluer (8.12). Dans certains cas, on peut aussi envisager d'utiliser les solveurs d'équations algébriques de Lyapunov (disponibles directement notamment en Matlab) en exploitant ce corollaire immédiat du résultat précédent :

**Lemme 8.7** Si  $A_c$  est une matrice de stabilité, alors la solution unique  $\Sigma$  de l'équation algébrique de Lyapunov

$$A_c\Sigma + \Sigma A_c^T + \Sigma_v^c = 0 \quad (8.11)$$

vérifie

$$\Sigma = \int_0^{+\infty} e^{tA_c} \Sigma_v^c e^{tA_c^T} dt \quad (8.12)$$

Si  $A_c$  est une matrice de stabilité, ce résultat permet d'exprimer l'intégrale (8.12) comme une fonction de  $\Sigma$  [Troch, 1988]. En effet, on a

$$\begin{aligned} \int_T^{+\infty} e^{tA_c} \Sigma_v^c e^{tA_c^T} dt &= \int_0^{+\infty} e^{(t-T)A_c} \Sigma_v^c e^{(t-T)A_c^T} dt \\ &= e^{-TA_c} \left( \int_0^{+\infty} e^{tA_c} \Sigma_v^c e^{tA_c^T} dt \right) e^{-TA_c^T} \\ &= e^{-TA_c} \Sigma e^{-TA_c^T} \end{aligned} \quad (8.13)$$

$$\int_0^{T_s} e^{tA_c} \Sigma_v^c e^{tA_c^T} dt = \int_0^{+\infty} e^{tA_c} \Sigma_v^c e^{tA_c^T} dt - \int_{T_s}^{+\infty} e^{tA_c} \Sigma_v^c e^{tA_c^T} dt = \Sigma - e^{-T_s A_c} \Sigma e^{-T_s A_c^T} \quad (8.14)$$

□

dynamique des MD

# Bibliographie de l'auteur (2007-2010)

## Revues à comité de lecture

C. Correia, H.-F. Raynaud, C. Kulcsár, J.-M. Conan, *On the optimal wave-front reconstruction and control in Adaptive Optics with mirror dynamics*, Journal of the Optical Society of America A (JOSA A), Vol 26, No. 2, pp. 333-349 (2010).

H.-F. Raynaud, C. Correia, C. Kulcsár, J.-M. Conan, *Minimum variance control of astronomical adaptive optics systems with actuator dynamics under synchronous and asynchronous sampling*, International Journal of Robust and Nonlinear Control, accepté.

C. Correia, H.-F. Raynaud, C. Kulcsár, J.-M. Conan, *Minimum-variance control for the woofer-tweeter concept*, Journal of the Optical Society of America A (JOSA A), en révision.

C. Correia et al, *Minimum-variance wave-front control with resonant deformable mirrors*, soumis au numéro spécial du European Journal of Control (EJC) en janvier 2010.

## Comptes rendus de conférences internationales

C. Correia, H.-F. Raynaud, C. Kulcsár, J.-M. Conan, *Accounting for mirror dynamics in optimal adaptive optics control*, Proceedings of the European Control Conference, 2009.

C. Correia, H.-F. Raynaud, C. Kulcsár, J.-M. Conan, *Minimum-variance control for the woofer-tweeter concept*, OSA Topical Meetings, Oct 2009.

C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, J.-M. Conan, C. Correia, C. Petit, *Control Design and Turbulent Phase Models in Adaptive Optics : A State-Space Interpretation*, OSA Topical Meetings, Oct 2009.

C. Correia, J.-M. Conan, C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, C. Petit, *Adapting optimal LQG methods to ELT-sized AO systems*, Proceedings of the AO4ELT conference, EDP Sciences, 2009.

F. Quirós-Pacheco, C. Correia, S. Esposito, *Fourier transform wavefront reconstruction for the pyramid wavefront sensor*, Proceedings of the AO4ELT conference, EDP Sciences, 2009.

I. Montilla, C. Béchet, M. LeLouarn, C. Correia, M. Tallon, M. Reyes, E. Thiébaud, *Comparison of Reconstruction and Control algorithms on the ESO end-to-end simulator OCTOPUS*, Proceedings of the AO4ELT conference, EDP Sciences, 2009.

C. Correia, H.-F. Raynaud, C. Kulcsár, J.-M. Conan, *Globally optimal minimum-variance*



*control in adaptive optics systems with mirror dynamics*, Proceedings of the SPIE - Ground-based Astronomical Instrumentation, Volume 7015, 2008.

C. Correia, C. Kulcsár, J-M. Conan and H.-F. Raynaud, *Analytical Hartmann-Shack modelling in the Fourier domain ; Application to real-time reconstruction in Adaptive Optics*, Proceedings of the SPIE - Ground-based Astronomical Instrumentation, Volume 7015, 2008.

H-F. Raynaud, C. Kulcsár, C. Correia and J-M. Conan, *Multi- rate LQG AO control*, Proceedings of the SPIE - Ground-based Astronomical Instrumentation, Volume 7015, 2008.

C. Correia, J-M. Conan, C. Kulcsár, H-F. Raynaud, C. Petit, T. Fusco, *Fourier-domain wave-front reconstruction for large adaptive optical systems*, Semaine Française d'Astronomie et d'Astrophysique, 2007.

## Séminaires

*Optimal control in Adaptive Optics Systems*, Herzberg Institute of Astrophysics, Victoria BC, Canada, Oct 2009.

*Optimal Reconstruction and Control Strategies for Extremely Large Telescopes*, Arcetri Observatory, Florence, May 2009.

*Adaptive Optics for Future Telescopes -- wave-front reconstruction and control*, Univ. of Padova, Padova, July 2007.

## Courts métrages de divulgation scientifique

Panique à Vera Cruz, 6', co-directeur, 2009

Superphoton et le jeu de l'OA, 6', co-directeur, 2008.

# Bibliographie

- [Aller-Carpentier *et al.*, 2008] Aller-Carpentier, E., Kasper, M., Martinez, P., Vernet, E., Fedrigo, E., Soenke, C., Tordo, S., Hubin, N., Verinaud, C., Esposito, S., Pinna, E., Puglisi, A., Tozzi, A., Quirós-Pacheco, F., Basden, A. G., Goodsell, S. J., Love, G. D., et Myers, R. M. (2008). High order test bench for extreme adaptive optics system optimization. In Hubin, N., Max, C. E., et Wizinowich, P. L., editors, *Proc. of the SPIE*, volume 7015, page 70153Z. [79](#)
- [Anderson et Moore, 1995a] Anderson, B. D. O. et Moore, J. B. (1995a). *Optimal Control, Linear Quadratic Methods*. Dover Publications Inc. [97](#), [100](#), [179](#)
- [Anderson et Moore, 1995b] Anderson, B. D. O. et Moore, J. B. (1995b). *Optimal Filtering*. Dover Publications Inc. [93](#), [100](#), [114](#), [134](#)
- [Ardeberg *et al.*, 2006] Ardeberg, A., Andersen, T., et Owner-Petersen, M. (2006). A European ELT design study. In P. Whitelock, M. Dennefeld, & B. Leibundgut, editor, *The Scientific Requirements for Extremely Large Telescopes*, volume 232 of *IAU Symposium*, pages 432–442. [17](#)
- [Arsenault *et al.*, 2006] Arsenault, R., Biasi, R., Gallieni, D., Riccardi, A., Lazzarini, P., Hubin, N., Fedrigo, E., Donaldson, R., Oberti, S., Stroebele, S., Conzelmann, R., et Duchateau, M. (2006). A deformable secondary mirror for the VLT. In Ellerbroek, B. L. et Calia, D. B., editors, *Proc. of the SPIE*, volume 6272, page 62720V. [17](#), [40](#), [169](#)
- [Arthur Gelb, 1974] Arthur Gelb, E. (1974). *Applied Optimal Estimation*. The M.I.T press. [56](#), [57](#)
- [Assémat *et al.*, 2006] Assémat, F., Wilson, R., et Gendron, E. (2006). Method for simulating infinitely long and non stationary phase screens with optimized memory storage. *Optics Express*, 14 :988–999. [32](#), [140](#)
- [Babcock, 1953] Babcock, H. W. (1953). The possibility of compensating astronomical seeing. *Astronomy and Astrophysics*, 65 :229. [34](#)
- [Bar-Shalom et Tse, 1974] Bar-Shalom, Y. et Tse, E. (1974). Dual effect, certainty equivalence, and separation in stochastic control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19 :494–500. [93](#), [99](#)
- [Barchers, 2004] Barchers, J. D. (2004). Multigrid approach to predictive wave-front reconstruction in adaptive optical systems. *Appl. Opt.*, 43 :3708–3716. [150](#)
- [Béchet, 2008] Béchet, C. (2008). *Commande optimale rapide pour l’optique adaptative des futurs télescopes hectométriques*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon. [126](#)
- [Béchet *et al.*, 2009] Béchet, C., Tallon, M., et Éric Thiébaud (2009). Comparison of minimum-norm maximum likelihood and maximum a posteriori wavefront reconstructions for large adaptive optics systems. *J. Opt. Soc. Am. A*, 26(3) :497–508. [143](#)
- [Béchet *et al.*, 2006] Béchet, C., Tallon, M., et Thiébaud, E. (2006). FRIM : minimum-variance reconstructor with a fractal iterative method. In Ellerbroek, B. L. et Calia, D. B., editors, *Proc. of the SPIE - Adaptive Optical System Technologies II*, volume 6272, page 62722U. [17](#)

- [Béchet *et al.*, 2007] Béchet, C., Tallon, M., et Thiébaud, É. (2007). Closed-Loop AO Performance with FrIM. In *Adaptive Optics : Analysis and Methods/Computational Optical Sensing and Imaging/Information Photonics/Signal Recovery and Synthesis Topical Meetings on CD-ROM*, page JTUA4. Optical Society of America. [17](#), [93](#), [106](#), [107](#), [125](#), [131](#)
- [Beckers, 1988] Beckers, J. M. (1988). Increasing the size of the isoplanatic patch with multiconjugate adaptive optics. In *ESO Conference on Very Large Telescopes and their Instrumentation*, volume 2, pages 693–703. [16](#), [45](#)
- [Beghi *et al.*, 2008a] Beghi, A., Cenedese, A., Maran, F., et Masiero, A. (2008a). A comparison of kalman filter based algorithms for turbulent phase control in an adaptive optics system. In *Proc. of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1839 – 1844. [140](#)
- [Beghi *et al.*, 2008b] Beghi, A., Cenedese, A., et Masiero, A. (2008b). A Markov-Random-Field-based approach to modeling and prediction of atmospheric turbulence. In *Proc. of the 16th Mediterranean Conference on Control and Automation*, pages 1735–1740. [140](#)
- [Beghi *et al.*, 2008c] Beghi, A., Cenedese, A., et Masiero, A. (2008c). On the estimation of atmospheric turbulence layers. In *Proc. of the 17th IFAC World Congress*, pages 8984–8989. [140](#)
- [Beghi *et al.*, 2008d] Beghi, A., Cenedese, A., et Masiero, A. (2008d). Stochastic realization approach to the efficient simulation of phase screens. *J. Opt. Soc. Am. A*, 25(2) :515–525. [32](#), [140](#)
- [Beuzit *et al.*, 2006] Beuzit, J.-L., Feldt, M., Dohlen, K., Mouillet, D., Puget, P., Antichi, J., Baruffolo, A., Baudoz, P., Berton, A., Boccaletti, A., Carbillet, M., Charton, J., Claudi, R., Downing, M., Feautrier, P., Fedrigo, E., Fusco, T., Gratton, R., Hubin, N., Kasper, M., Langlois, M., Moutou, C., Mugnier, L., Pragt, J., Rabou, P., Saisse, M., Schmid, H. M., Stadler, E., Turrato, M., Udry, S., Waters, R., et Wildi, F. (2006). SPHERE : A 'Planet Finder' Instrument for the VLT. *The Messenger*, 125 :29–+. [53](#)
- [Beuzit et Hubin, 1993] Beuzit, J. L. et Hubin, N. (1993). ADONIS - a user friendly adaptive optics system for the 3.6-m telescope. *The Messenger*, 71 :52–53. [15](#), [35](#)
- [Bowman et Rhodes, 1997] Bowman, K. W. et Rhodes, W. T. (1997). Application of wavelets to wavefront reconstruction in adaptive optical systems. In Tyson, R. K. et Fugate, R. Q., editors, *Proc. of the SPIE*, volume 3126, pages 288–299. [61](#)
- [Brennan et Rhoadarmer, 2006] Brennan, T. J. et Rhoadarmer, T. A. (2006). Performance of a woofer-tweeter deformable mirror control architecture for high-bandwidth high-spatial resolution adaptive optics. In Giles, M. K., Gonglewski, J. D., et Carreras, R. A., editors, *Proc. of the SPIE*, volume 6306, page 63060B. [171](#), [186](#)
- [Brummelaar, 1995] Brummelaar, T. A. T. (1995). The contribution of high order Zernike modes to wavefront tilt. *Opt. Comm.*, 115 :417–424. [33](#)
- [Burrus *et al.*, 1998] Burrus, C. S., Gopinath, R. A., et Guo, H. (1998). *Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms : a primer*. Prentice-Hall, Inc. [61](#)
- [Charton *et al.*, 2003] Charton, J., Hubert, Z., Stadler, E., Schartz, W., et Beuzit, J.-L. (2003). System level simulation of micro-mirrors for adaptive optics. volume 4842, pages 207–218. [40](#), [193](#)
- [Chauvin *et al.*, 2004] Chauvin, G., Lagrange, A., Dumas, C., Zuckerman, B., Mouillet, D., Song, I., Beuzit, J., et Lowrance, P. (2004). A giant planet candidate near a young brown dwarf. Direct VLT/NACO observations using IR wavefront sensing. , 425 :L29–L32. [16](#)
- [Conan *et al.*, 1995] Conan, J.-M., Rousset, G., et Madec, P.-Y. (1995). Wave-front temporal spectra in high-resolution imaging through turbulence. *J. Opt. Soc. Am. A*, 12 :1559–1570. [27](#), [118](#)

- [Conan, 2000] Conan, R. (2000). *Modélisation des effets de l'échelle externe de cohérence spatiale du front d'onde pour l'observation en Haute Résolution Angulaire en Astronomie*. PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis. 26, 30
- [Conan et al., 2007] Conan, R., Bradley, C., Hampton, P., Keskin, O., Hilton, A., et Blain, C. (2007). Distributed modal command for a two-deformable-mirror adaptive optics system. *Appl. Opt.*, 46(20) :4329–4340. 187
- [Conway et al., 2007] Conway, J., Osborn, J., et Fowler, J. (2007). Stroboscopic Imaging Interferometer for MEMS Performance Measurement. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 1(3) :668–674. 40, 193
- [Correia, 2006] Correia, C. (2006). Multi-stage reconstructor. Technical report, ESO - European Southern Observatory. 61
- [Correia et al., 2009a] Correia, C., Conan, J.-M., Kulcsár, C., Raynaud, H.-F., et Petit, C. (2009a). Adapting optimal LQG methods to ELT-sized AO systems. In *Proc. of the AO4ELT Conference*. EDP Sciences. 161, 213
- [Correia et al., 2007] Correia, C., Conan, J.-M., Kulcsár, C., Raynaud, H.-F., Petit, C., et Fusco, T. (2007). Fourier-domain wave-front reconstruction for large adaptive optical systems. In *Semaine Française d'Astronomie et d'Astrophysique*. EDP Sciences. 71, 73, 78, 86, 88, 212
- [Correia et al., 2006] Correia, C., Fedrigo, E., Louarn, M. L., Verinaud, C., et Korkiakoski, V. (2006). Multi-rate control of high-order adaptive optics systems. volume 6272, page 62722R. 105
- [Correia et al., 2008a] Correia, C., Kulcsár, C., Conan, J.-M., et Raynaud, H.-F. (2008a). Hartmann modelling in the discrete spatial-frequency domain : application to real-time reconstruction in adaptive optics. In Hubin, N., Max, C. E., et Wizinowich, P. L., editors, *Proc. of the SPIE*, volume 7015, page 701551. 68, 71, 72, 76, 78, 81, 212, 213
- [Correia et al., 2010] Correia, C., Kulcsár, C., Conan, J.-M., et Raynaud, H.-F. (2010). On the optimal reconstruction and control of adaptive optical systems with mirror dynamics. *J. Opt. Soc. Am. A*, 27(2) :333–349. 204, 213
- [Correia et al., 2008b] Correia, C., Raynaud, H.-F., Kulcsár, C., et Conan, J.-M. (2008b). Globally optimal minimum mean-square error control in adaptive optical systems with mirror dynamics. In Hubin, N., Max, C. E., et Wizinowich, P. L., editors, *Proc. of the SPIE*, volume 7015, page 70151F. 170, 184, 199, 204
- [Correia et al., 2009b] Correia, C., Raynaud, H.-F., Kulcsár, C., et Conan, J.-M. (2009b). Accounting for mirror dynamics in optimal adaptive optics control. In *Proc. of the European Control Conference*. 170, 199, 204, 213
- [Correia et al., 2009c] Correia, C., Raynaud, H.-F., Kulcsár, C., et Conan, J.-M. (2009c). Minimum-variance control for astronomical adaptive optics with resonant deformable mirrors. In *European Journal of Control (submitted)*. 204
- [Correia et al., 2009d] Correia, C., Raynaud, H.-F., Kulcsár, C., et Conan, J.-M. (2009d). Minimum variance control for the woofer-tweeter concept. In *Adaptive Optics : Methods, Analysis and Applications*, page AOWB4. Optical Society of America. 187, 204
- [Costille, 2009] Costille, A. (2009). *Les optiques adaptatives grand champ : Stratégie de correction et validations expérimentales*. PhD thesis, Univ. Paris Diderot. 17, 107, 162
- [Costille et al., 2009] Costille, A., Petit, C., Conan, J.-M., Kulcsár, C., Raynaud, H.-F., et Fusco, T. (2009). Wide field adaptative optics laboratory demonstration with closed loop tomographic control. *J. Opt. Soc. Am. A*. in press. 107

- [Dai, 1995] Dai, G.-M. (1995). Modal compensation of atmospheric turbulence with the use of Zernike polynomials and Karhunen-Loève functions. *J. Opt. Soc. Am. A*, 12 :2182–2193. [61](#)
- [Dai, 2006] Dai, G.-M. (2006). Wavefront expansion basis functions and their relationships. *J. Opt. Soc. Am. A*, 23 :1657–1668. [61](#)
- [Dessenne *et al.*, 1997] Dessenne, C., Madec, P.-Y., et Rousset, G. (1997). Modal prediction for closed-loop adaptive optics. *Opt. Lett.*, 22(20) :1535–1537. [16](#), [49](#)
- [Dessenne *et al.*, 1998a] Dessenne, C., Madec, P.-Y., et Rousset, G. (1998a). Optimization of a predictive controller for closed-loop adaptive optics. *Appl. Opt.*, 37(21) :4623–4633. [49](#)
- [Dessenne *et al.*, 1998b] Dessenne, C., Madec, P.-Y., et Rousset, G. (1998b). Optimization of a predictive controller for closed-loop adaptive optics. *Appl. Opt.*, 37 :4623–4633. [105](#)
- [Dessenne *et al.*, 1999] Dessenne, C., Madec, P.-Y., et Rousset, G. (1999). Sky implementation of modal predictive control in adaptive optics. *Opt. Lett.*, 24(5) :339–341. [49](#)
- [Dicke, 1975] Dicke, R. H. (1975). Phase-contrast detection of telescope seeing errors and their correction. *Astrophysical Journal*, 198 :605–615. [16](#), [45](#)
- [Diolaiti *et al.*, 2003] Diolaiti, E., Arcidiacono, C., Ragazzoni, R., et Fedrigo, E. (2003). Identification and rejection of waffle modes in layer-oriented adaptive optics. In Wizinowich, P. L. et Bonaccini, D., editors, *Proc. of the SPIE - Adaptive Optical System Technologies II*, volume 4839, pages 1001–1010. [61](#)
- [Dowla *et al.*, 2000] Dowla, F. U., Brase, J. M., Olivier, S. S., et Thompson, C. A. (2000). Fast Fourier and wavelet transforms for wavefront reconstruction in adaptive optics. In *Proc. SPIE Vol. 4124, p. 118-127, High-Resolution Wavefront Control : Methods, Devices, and Applications II, John D. Gonglewski ; Mikhail A. Vorontsov ; Mark T. Gruneisen ; Eds.*, volume 4124, pages 118–127. [61](#)
- [Ellerbroek, 1994] Ellerbroek, B. L. (1994). First-order performance evaluation of adaptive-optics systems for atmospheric-turbulence compensation in extended-field-of-view astronomical telescopes. *J. Opt. Soc. Am. A*, 11 :783–805. [16](#), [44](#), [45](#)
- [Ellerbroek, 2002] Ellerbroek, B. L. (2002). Efficient computation of minimum-variance wave-front reconstructors with sparse matrix techniques. *J. Opt. Soc. Am. A*, 19 :1803–1816. [17](#), [45](#), [57](#), [61](#), [123](#), [145](#)
- [Ellerbroek *et al.*, 2003] Ellerbroek, B. L., Gilles, L., et Vogel, C. R. (2003). A computationally efficient wavefront reconstructor for simulation of multi-conjugate adaptive optics on giant telescopes. In *Adaptive Optical System Technologies II. Edited by Wizinowich, Peter L. ; Bonaccini, Domenico. Proc. of the SPIE, Volume 4839, pp. 989-1000 (2003).*, volume 4839, pages 989–1000. [61](#)
- [Ellerbroek *et al.*, 1994] Ellerbroek, B. L., van Loan, C., Pitsianis, N. P., et Plemmons, R. J. (1994). Optimizing closed-loop adaptive-optics performance with use of multiple control bandwidths. *J. Opt. Soc. Am. A*, 11 :2871–2886. [49](#), [105](#)
- [Ellerbroek et Vogel, 2009] Ellerbroek, B. L. et Vogel, C. R. (2009). Inverse problems in astronomical adaptive optics. *Inverse Problems*, 25(6). [68](#)
- [Ellis, 1999] Ellis, E. M. (1999). *Low-cost Bimorph Mirrors in Adaptive Optics*. PhD thesis, Imperial College of Science, Technology and Medicine. [38](#), [193](#)
- [Freischlad et Koliopoulos, 1986] Freischlad, K. R. et Koliopoulos, C. L. (1986). Modal estimation of a wave front from difference measurements using the discrete Fourier transform. *J. Opt. Soc. Am. A*, 3 :1852–1861. [53](#), [67](#), [71](#), [72](#)



- [Fried, 1965] Fried, D. (1965). Statistics of a geometric representation of wavefront distortion. *J. Opt. Soc. Am. A*, 55,(11) :1427–1435. See ERRATA. [53](#)
- [Fried, 1977] Fried, D. L. (1977). Least-square fitting a wave-front distortion estimate to an array of phase-difference measurements. *J. Opt. Soc. Am. A*, 67 :370–375. [63](#), [78](#), [138](#)
- [Fusco, 2000] Fusco, T. (2000). *Étude de la correction partielle en optique adaptative*. PhD thesis, Université de Nice Sophia-Antipolis. [32](#)
- [Fusco *et al.*, 1999] Fusco, T., Conan, J.-M., Michau, V., Mugnier, L. M., et Rousset, G. (1999). Efficient phase estimation for large-field-of-view adaptive optics. *Opt. Lett.*, 24(21) :1472–1474. [16](#), [45](#)
- [Fusco *et al.*, 2001] Fusco, T., Conan, J.-M., Rousset, G., Mugnier, L. M., et Michau, V. (2001). Optimal wave-front reconstruction strategies for multiconjugate adaptive optics. *J. Opt. Soc. Am. A*, 18 :2527–2538. [16](#), [45](#), [57](#), [116](#)
- [Gasmi *et al.*, 2008] Gasmi, R., Siquin, J. C., Jagourel, P., Dournaux, J. L., Le Bihan, D., et Hammer, F. (2008). Modeling of a large deformable mirror for future E-ELT. In *Proc. of the SPIE*, volume 7017. [40](#), [169](#), [193](#), [204](#)
- [Gavel, 2003] Gavel, D. T. (2003). Suppressing anomalous localized waffle behavior in least-squares wavefront reconstructors. In Wizinowich, P. L. et Bonaccini, D., editors, *Proc. of the SPIE - Adaptive Optical System Technologies II*, volume 4839, pages 972–980. [60](#), [107](#)
- [Gavel, 2004] Gavel, D. T. (2004). Tomography for multiconjugate adaptive optics systems using laser guide stars. In Bonaccini Calia, D., Ellerbroek, B. L., et Ragazzoni, R., editors, *Proc. of the SPIE*, volume 5490, pages 1356–1373. [61](#)
- [Gendron et Léna, 1994] Gendron, E. et Léna, P. (1994). Astronomical adaptive optics I : Modal control optimization. *Astronomy and Astrophysics*, 291 :337–347. [16](#), [49](#), [50](#), [105](#)
- [Gendron et Léna, 1995] Gendron, E. et Léna, P. (1995). Astronomical adaptive optics II. Experimental results of an optimized modal control. *Astronomy and Astrophysics Supplement Series*, 111 :153. [49](#)
- [Gerchberg, 1974] Gerchberg, R. (1974). Super-resolution through error energy reduction. *Journal of Modern Optics*, 21 :709–720(12). [54](#), [69](#), [73](#)
- [Gikhman et Skorokhod, 2006] Gikhman, I. I. et Skorokhod, A. V. (2006). *Introduction to the Theory of Random Processes*. Dover Publications. [184](#)
- [Gilles, 2003a] Gilles, L. (2003a). Order-n sparse minimum-variance open-loop reconstructor for extreme adaptive optics. *Opt. Lett.*, 28 :1927–1929. [61](#), [150](#)
- [Gilles, 2003b] Gilles, L. (2003b). Sparse minimum-variance open-loop reconstructors for extreme adaptive optics : order n multigrid versus preordered cholesky factorization. In *Proc. of the SPIE*, volume 5169, pages 201–205. [17](#), [61](#), [146](#), [150](#)
- [Gilles, 2005] Gilles, L. (2005). Closed-loop stability and performance analysis of least-squares and minimum-variance control algorithms for multiconjugate adaptive optics. *Appl. Opt.*, 44 :993–1002. [17](#), [93](#), [106](#), [120](#), [124](#), [131](#)
- [Gilles et Ellerbroek, 2006] Gilles, L. et Ellerbroek, B. (2006). Shack-hartmann wavefront sensing with elongated sodium laser beacons : centroiding versus matched filtering. *Appl. Opt.*, 45(25) :6568–6576. [37](#)
- [Gilles *et al.*, 2003a] Gilles, L., Ellerbroek, B. L., et Vogel, C. R. (2003a). Layer-oriented multigrid wavefront reconstruction algorithms for multi-conjugate adaptive optics. In *Proc. of the SPIE*, volume 4839, pages 1011–1022. [61](#)

- [Gilles *et al.*, 2003b] Gilles, L., Ellerbroek, B. L., et Vogel, C. R. (2003b). Preconditioned conjugate gradient wave-front reconstructors for multiconjugate adaptive optics. *Appl. Opt.*, 42 :5233–5250. [61](#), [138](#)
- [Gilles *et al.*, 2002] Gilles, L., Vogel, C. R., et Ellerbroek, B. L. (2002). Multigrid preconditioned conjugate-gradient method for large-scale wave-front reconstruction. *J. Opt. Soc. Am. A*, 19 :1817–1822. [17](#), [61](#), [138](#), [150](#)
- [Gilmozzi et Spyromilio, 2008] Gilmozzi, R. et Spyromilio, J. (2008). The 42m European ELT : status. In Stepp, L. M. et Gilmozzi, R., editors, *Proc. of the SPIE*, volume 7012, page 701219. [169](#), [171](#), [204](#)
- [Gradstein et Ryshik, 1981] Gradstein, I. S. et Ryshik, I. H. (1981). *Tables of Series, Products and Integrals*. Harri Deutsch Verlag. [27](#)
- [Hackbusch, 1985] Hackbusch, W. (1985). *Multi-grid Methods with Applications*. Springer Series in Computational Mathematics. Springer-Verlag. [61](#), [150](#)
- [Hallibert *et al.*, 2006] Hallibert, P., Arsenault, R., Delabre, B., Esposito, S., Hubin, N., Quirrenbach, A., Riccardi, A., Stroebele, S., Stuik, R., et Vink, R. (2006). Optical design for the adaptive secondary setup and instrument stimulator (ASSIST). In Mouroulis, P. Z., Smith, W. J., et Johnson, R. B., editors, *Proc. of the SPIE*, volume 6288, page 62880C. [169](#)
- [Hampton *et al.*, 2009] Hampton, P. J., Agathoklis, P., et Bradley, C. (2009). Wavefront reconstruction over a circular aperture using gradient data extrapolated via the mirror equations. *Appl. Opt.*, 48(20) :4018–4030. [62](#)
- [Hampton *et al.*, 2006] Hampton, P. J., Conan, R., Bradley, C., et Agathoklis, P. (2006). Control of a woofer tweeter system of deformable mirrors. In Lewis, H. et Bridger, A., editors, *Proc. of the SPIE*, volume 6274, page 62741Z. [187](#)
- [Harding *et al.*, 1999] Harding, C. M., Johnston, R. A., et Lane, R. G. (1999). Fast Simulation of a Kolmogorov Phase Screen. *Appl. Opt.*, 38(11) :2161–2170. [32](#), [123](#)
- [Herriot *et al.*, 2006] Herriot, G., Hickson, P., Ellerbroek, B. L., Andersen, D. A., Davidge, T., Erickson, D. A., Powell, I. P., Clare, R., Gilles, L., Boyer, C., Smith, M., Saddlemeyer, L., et Véran, J.-P. (2006). NFIRAOS : TMT narrow field near-infrared facility adaptive optics. In Ellerbroek, B. L. et Calia, D. B., editors, *Proc. of the SPIE*, volume 6272, page 62720Q. [171](#), [207](#)
- [Herriot *et al.*, 2005] Herriot, G., Hickson, P., Ellerbroek, B. L., Andersen, D. A., Davidge, T., Erickson, D. A., Powell, I. P., Clare, R., Smith, M., Saddlemeyer, L., et Véran, J.-P. (2005). NFIRAOS : TMT facility adaptive optics with conventional DMs. In Tyson, R. K. et Lloyd-Hart, M., editors, *Proc. of the SPIE*, volume 5903, page 590302. [171](#), [207](#)
- [Herrmann, 1980] Herrmann, J. (1980). Least-squares wave front errors of minimum norm. *J. Opt. Soc. Am.*, 70(1) :28–35. [71](#), [73](#)
- [Herrmann, 1992] Herrmann, J. (1992). Phase variance and Strehl ratio in adaptive optics. *J. Opt. Soc. Am. A*, 9 :2257–2258. [30](#), [57](#), [108](#), [170](#)
- [Horsleya *et al.*, 2007] Horsleya, D. A., Parka, H., Lautb, S. P., et Werner, J. S. (2007). Characterization of a bimorph deformable mirror using stroboscopic phase-shifting interferometry. In *Sensors and Actuators A : Physical*, number 1, page 28. [40](#), [193](#)
- [Hubin *et al.*, 2007] Hubin, N., Conan, J.-M., et Petit, C. (2007). Technical specifications for the M4 adaptive unit of the E-ELT : conceptual design, prototyping and preliminary design study. Technical report, ESO. [210](#)

- [Hudgin, 1977] Hudgin, R. H. (1977). Optimal wave-front estimation. *J. Opt. Soc. Am. A*, 67 :378–382. [53](#), [63](#)
- [Hudgin, 1977] Hudgin, R. H. (1977). Wave-front compensation error due to finite corrector-element size. *J. Opt. Soc. Am. A*, 67(3) :393–395. [44](#)
- [Hudgin, 1977] Hudgin, R. H. (1977). Wave-front reconstruction for compensated imaging. *J. Opt. Soc. Am. A*, 67 :375–378. [78](#)
- [Jones, 2003] Jones, K. J. (2003). Wavelet-based adaptive optics. In Unser, M. A., Aldroubi, A., et Laine, A. F., editors, *Proc. of the SPIE*, volume 5207, pages 902–915. [62](#)
- [Jones, 2004] Jones, K. J. (2004). Wavelet-based wavefront control. In Gonglewski, J. D., Gruneisen, M. T., et Giles, M. K., editors, *Proc. of the SPIE*, volume 5553, pages 139–149. [62](#)
- [Jones, 2009] Jones, K. J. (2009). Wavelet-based phase determination in optical turbulence. In Hammel, S. M., van Eijk, A. M. J., et Vorontsov, M. A., editors, *Proc. of the SPIE*, volume 7463, page 74630F. [62](#)
- [Joseph et Tou, 1961] Joseph, P. et Tou, J. (1961). On linear control theory. *AIEE trans. on Appl. and Indus.*, (80) :193–196. [93](#), [99](#)
- [J.W.Hardy, 1998] J.W.Hardy (1998). *Adaptive Optics for Astronomical Telescopes*. Oxford, New York. [30](#), [41](#), [68](#)
- [Kalman, 1960] Kalman, R. E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME–Journal of Basic Engineering*, 82 :35–45. Transcribed into electronic form by John Lukesh. [93](#), [100](#)
- [Kármán, 1948] Kármán, T. V. (1948). Progress in the statistical theory of turbulence. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 34 :530–539. [23](#)
- [Kasper et al., 2004] Kasper, M., Fedrigo, E., Looze, D. P., Bonnet, H., Ivanescu, L., et Oberti, S. (2004). Fast calibration of high-order adaptive optics systems. *J. Opt. Soc. Am. A*, 21(6) :1004–1008. [58](#)
- [Kendrew et al., 2007] Kendrew, S., Brandl, B., Lenzen, R., Venema, L., Käufl, H. U., Finger, G., Glasse, A., et Stuik, R. (2007). Mid-infrared instrumentation for the european extremely large telescope. In Heaney, J. B. et Burriesci, L. G., editors, *Proc. of the SPIE*, volume 6692, page 66920B. [17](#), [169](#)
- [Kolmogorov, 1941a] Kolmogorov, A. N. (1941a). Dissipation of energy in the locally isotropic turbulence. *Comptes rendus (Doklady) de l’Académie des Sciences de l’U.R.S.S.*, 32 :16–18. [23](#)
- [Kolmogorov, 1941b] Kolmogorov, A. N. (1941b). The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynold’s numbers. *Comptes rendus (Doklady) de l’Académie des Sciences de l’U.R.S.S.*, 30 :301–305. [23](#)
- [Kulcsár et al., 2009] Kulcsár, C., Raynaud, H.-F., Conan, J.-M., Correia, C., et Petit, C. (2009). Control design and turbulent phase models in adaptive optics : A state-space interpretation. In *Adaptive Optics : Methods, Analysis and Applications*, page AOWB1. Optical Society of America. [120](#), [126](#), [127](#)
- [Kulcsár et al., 2008] Kulcsár, C., Raynaud, H.-F., Petit, C., et Conan, J.-M. (2008). Minimum variance control in presence of actuator saturation in adaptive optics. In Hubin, N., Max, C. E., et Wizinowich, P. L., editors, *Proc. of the SPIE*, volume 7015, page 70151G. [208](#)
- [Kulcsár et al., 2006] Kulcsár, C., Raynaud, H.-F., Petit, C., Conan, J.-M., et de Lesegno, P. V. (2006). Optimal control, observers and integrators in adaptive optics. *Opt. Express*, 14(17) :7464–7476. [93](#), [105](#), [107](#), [109](#), [120](#), [123](#)



- [Lane *et al.*, 1992] Lane, R. G., Glindemann, A., et Dainty, J. C. (1992). Simulation of a Kolmogorov phase screen. *Waves in Random and Complex Media*, 2(3) :209 – 224. [32](#), [123](#)
- [Lavigne et Véran, 2008] Lavigne, J.-F. et Véran, J.-P. (2008). Woofer-tweeter control in an adaptive optics system using a fourier reconstructor. *J. Opt. Soc. Am. A*, 25(9) :2271–2279. [187](#)
- [Le Louarn, 2002] Le Louarn, M. (2002). Multi-Conjugate Adaptive Optics with laser guide stars : performance in the infrared and visible. , 334 :865–874. [87](#), [106](#)
- [Le Roux, 2003] Le Roux, B. (2003). *Commande optimale en Optique Adaptative Classique et Multiconjuguée*. PhD thesis, Ecole Doctorale Sciences Fondamentales et Appliquées, Univ. Niece Sophia-Antipolis. [17](#), [107](#), [162](#)
- [Le Roux *et al.*, 2004] Le Roux, B., Conan, J.-M., Kulcsár, C., Raynaud, H.-F., Mugnier, L. M., et Fusco, T. (2004). Optimal control law for classical and multiconjugate adaptive optics. *J. Opt. Soc. Am. A*, 21 :1261–1276. [107](#), [111](#), [117](#), [118](#), [119](#), [212](#)
- [Lee, 2007] Lee, L. H. (2007). Sparse-matrix regularization for minimum-variance reconstruction of pseudo-kolmogorov turbulence. In *Adaptive Optics : Analysis and Methods/Computational Optical Sensing and Imaging/Information Photonics/Signal Recovery and Synthesis Topical Meetings on CD-ROM*, page JTua2. Optical Society of America. [145](#)
- [Lessard *et al.*, 2008] Lessard, L., MacMynowski, D., West, M., Bouchez, A., et Lall, S. (2008). Experimental validation of single-iteration multigrid wavefront reconstruction at the palomar observatory. *Opt. Lett.*, 33(18) :2047–2049. [150](#)
- [Lloyd-Hart, 2000] Lloyd-Hart, M. (2000). Thermal performance enhancement of adaptive optics by use if a deformable secondary mirror. *Astronomical Society of the Pacific*, (112) :164–272. [17](#)
- [Looze, 2006] Looze, D. P. (2006). Minimum variance control structure for adaptive optics systems. *J. Opt. Soc. Am. A*, 23 :603–612. [107](#)
- [Looze, 2007] Looze, D. P. (2007). Discrete-time model of an adaptive optics systems. *J. Opt. Soc. Am. A*, 24 :2850–+. [107](#), [169](#)
- [Looze, 2008] Looze, D. P. (2008). Structure of a hybrid signal LQG controller for adaptive optics. In *Proc. of the SPIE*, volume 7015. [107](#)
- [Looze, 2009] Looze, D. P. (2009). Linear-quadratic-gaussian control for adaptive optics systems using a hybrid model. *J. Opt. Soc. Am. A*, 26(1) :1–9. [107](#), [169](#)
- [Looze *et al.*, 2003] Looze, D. P., Kasper, M., Hippler, S., Beker, O., et Weiss, R. (2003). Optimal Compensation and Implementation for Adaptive Optics Systems. *Experimental Astronomy*, 15 :67–88. [107](#)
- [Louarn et Tallon, 2002] Louarn, M. L. et Tallon, M. (2002). Analysis of modes and behavior of a multiconjugate adaptive optics system. *J. Opt. Soc. Am. A*, 19 :912–925. [154](#)
- [Lundström et Unsbo, 2007] Lundström, L. et Unsbo, P. (2007). Transformation of Zernike coefficients : scaled, translated, and rotated wavefronts with circular and elliptical pupils. *J. Opt. Soc. Am. A*, 24(3) :569–577. [141](#)
- [Macintosh *et al.*, 2006] Macintosh, B., Graham, J., Palmer, D., Doyon, R., Gavel, D., Larkin, J., Oppenheimer, B., Saddlemyer, L., Wallace, J. K., Bauman, B., Evans, J., Erikson, D., Morzinski, K., Phillion, D., Poyneer, L., Sivaramakrishnan, A., Soummer, R., Thibault, S., et Veran, J.-P. (2006). The Gemini Planet Imager. In Ellerbroek, B. L. et Calia, D. B., editors, *Proc. of the SPIE*, volume 6272, page 62720L. [53](#)

- [MacMartin, 2003] MacMartin, D. G. (2003). Local, hierarchic, and iterative reconstructors for adaptive optics. *J. Opt. Soc. Am. A*, 20 :1084–1093. [61](#)
- [Madec, 1999] Madec, P.-Y. (1999). *Adaptive Optics for Astronomy*, chapter Control Techniques. Cambridge University Press, New York. [46](#)
- [McGlamery, 1976] McGlamery, B. L. (1976). Computer simulation studies of compensation of turbulence degraded images. *Image Processing, J. C. Urbach, ed, SPIE*, (74) :2257–233. [30](#)
- [Meimon, 2009] Meimon, S. (2009). An optimized calibration strategy for high order adaptive optics systems : the Slope-Oriented Hadamard Actuation. In *Proc. of the AO4ELT Conference*. EDP Sciences. [58](#)
- [Michau *et al.*, 1992] Michau, V., Rousset, G., et Fontanella, J. C. (1992). Wavefront sensing from extended sources. In *Real Time and Post Facto Solar Image Correction*, volume 13 of *Summer Workshop Series*, page 124–128. [37](#)
- [Montilla *et al.*, 2009] Montilla, I., Béchet, C., Le Louarn, M., Correia, C., Tallon, M., Reyes, M., et Thiébaud, É. (2009). Comparison of reconstruction and control algorithms on the ESO end-to-end simulator OCTOPUS. In *Proc. of the AO4ELT Conference*. EDP Sciences. [127](#)
- [Morari et Zafriou, 1989] Morari, M. et Zafriou, E. (1989). *Robust Process Control*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ. [107](#), [125](#)
- [Mugnier, 2008] Mugnier, L. (2008). Des données à la connaissance de l’objet : le problème inverse. In Léna, P., Rouan, D., Lebrun, F., Mignard, F., et Pelat, D., editors, *L’observation en astrophysique*, chapter 9 section 6. EDP Sciences, Les Ulis, France. [56](#)
- [Mugnier et Le Besnerais, 2001] Mugnier, L. et Le Besnerais, G. (2001). Problèmes inverses en imagerie optique à travers la turbulence. In Idier, J., editor, *Approche bayésienne pour les problèmes inverses*, chapter 10, pages 241–270. Hermes, Paris. [56](#)
- [Neichel *et al.*, 2009] Neichel, B., Fusco, T., et Conan, J.-M. (2009). Tomographic reconstruction for wide-field adaptive optics systems : Fourier domain analysis and fundamental limitations. *J. Opt. Soc. Am. A*, 26(1) :219–235. [70](#), [165](#)
- [Nicolle *et al.*, 2004] Nicolle, M., Fusco, T., Rousset, G., et Michau, V. (2004). Improving the Shack-Hartmann wave-front sensor measurement for extreme adaptive optics. *Opt. Lett.*, 29(23) :2743–2745. [37](#)
- [Noll, 1976] Noll, R. J. (1976). Zernike polynomials and atmospheric turbulence. *J. Opt. Soc. Am. A*, 66 :207–211. [30](#), [33](#), [164](#), [194](#)
- [Oppenheim et Schafer, 1999] Oppenheim, A. V. et Schafer, R. W. (1999). *Discrete-time signal processing*. Prentice-Hall, Inc., 2nd edition. [64](#)
- [Oppenheim et Willsky, 1997] Oppenheim, A. V. et Willsky, A. S. (1997). *Signals & Systems*. Prentice-Hall, Inc., 2nd edition. [64](#)
- [Papoulis, 1968] Papoulis, A. (1968). *Systems and Transforms with Applications in Optics*. Robert E. Krieger Publishing Company, Inc., 1 edition. [97](#)
- [Papoulis, 1975] Papoulis, A. (1975). A new algorithm in spectral analysis and band-limited extrapolation. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 22(9) :735–742. [22](#), [74](#), [75](#)
- [Paschall *et al.*, 1991] Paschall, R., Von Bokern, M., et Welsh, B. (1991). Design of a linear quadratic Gaussian controller for an adaptive optics system. In *Proc. of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, volume vol. 2, pages 1761–1769. [107](#), [169](#)

- [Paschall et Anderson, 1993] Paschall, R. N. et Anderson, D. J. (1993). Linear Quadratic Gaussian control of a deformable mirror adaptive optics system with time-delayed measurements. *Appl. Opt.*, 32 :6347–6358. [107](#), [169](#)
- [Petit, 2006] Petit, C. (2006). *Etude de la commande optimale en OA et OAMC, validation numérique et expérimentale*. PhD thesis, E.D. Galilée, Univ. Paris XIII. [17](#), [55](#), [107](#), [109](#), [111](#), [112](#), [117](#), [124](#), [133](#), [141](#), [162](#), [212](#)
- [Petit et al., 2009] Petit, C., Conan, J.-M., Kulcsár, C., et Raynaud, H.-F. (2009). Linear quadratic gaussian control for adaptive optics and multiconjugate adaptive optics : experimental and numerical analysis. *J. Opt. Soc. Am. A*, 26(6) :1307–1325. [107](#), [141](#)
- [Petit et al., 2008] Petit, C., Fusco, T., Charton, J., Mouillet, D., Rabou, P., Buey, T., Rousset, G., Sauvage, J.-F., Baudoz, P., Gigan, P., Kasper, M., Fedrigo, E., Hubin, N., Feautrier, P., Beuzit, J.-L., et Puget, P. (2008). The SPHERE XAO system : design and performance. In Hubin, N., Max, C. E., et Wizinowich, P. L., editors, *Proc. of the SPIE*, volume 7015, page 70151U. [107](#), [187](#)
- [Petit et al., 2004] Petit, C., Quirós-Pacheco, F., Conan, J.-M., Kulcsár, C., Raynaud, H.-F., Fusco, T., et Rousset, G. (2004). Kalman-filter-based control for adaptive optics. In *Proc. of the SPIE*, volume 5490, pages 1414–1425. [107](#)
- [Piatrou et Gilles, 2005] Piatrou, P. et Gilles, L. (2005). Robustness study of the pseudo open-loop controller for multiconjugate adaptive optics. *Appl. Opt.*, 44(6) :1003–1010. [106](#), [124](#)
- [Piatrou et Roggemann, 2007] Piatrou, P. et Roggemann, M. C. (2007). Performance study of Kalman filter controller for multiconjugate adaptive optics. *Appl. Opt.*, 46(9) :1446–1455. [106](#), [138](#)
- [Poyneer et al., 2009] Poyneer, L., van Dam, M., et Véran, J.-P. (2009). Experimental verification of the frozen flow atmospheric turbulence assumption with use of astronomical adaptive optics telemetry. *J. Opt. Soc. Am. A*, 26(4) :833–846. [107](#), [141](#), [165](#)
- [Poyneer et Véran, 2008] Poyneer, L. et Véran, J.-P. (2008). Predictive wavefront control for adaptive optics with arbitrary control loop delays. *J. Opt. Soc. Am. A*, 25(7) :1486–1496. [107](#)
- [Poyneer, 2003] Poyneer, L. A. (2003). Advanced techniques for Fourier transform wavefront reconstruction. In *Proc. of the SPIE*, volume 4839, pages 1023–1034. [17](#), [76](#)
- [Poyneer et al., 2002] Poyneer, L. A., Gavel, D. T., et Brase, J. M. (2002). Fast wave-front reconstruction in large adaptive optics systems with use of the Fourier transform. *J. Opt. Soc. Am. A*, 19 :2100–2111. [17](#), [53](#), [68](#), [71](#), [72](#), [73](#), [76](#)
- [Poyneer et al., 2007] Poyneer, L. A., Macintosh, B. A., et Véran, J.-P. (2007). Fourier transform wavefront control with adaptive prediction of the atmosphere. *J. Opt. Soc. Am. A*, 24(9) :2645–2660. [107](#), [131](#), [141](#), [151](#), [165](#), [214](#)
- [Poyneer et Véran, 2005] Poyneer, L. A. et Véran, J.-P. (2005). Optimal modal Fourier-transform wavefront control. *J. Opt. Soc. Am. A*, 22(8) :1515–1526. [70](#), [73](#)
- [Poyneer et Véran, 2008] Poyneer, L. A. et Véran, J.-P. (2008). Toward feasible and effective predictive wavefront control for adaptive optics. In Hubin, N., Max, C. E., et Wizinowich, P. L., editors, *Proc. of the SPIE - Adaptive Optical Systems*, volume 7015, page 70151E. [107](#)
- [Quirós-Pacheco et al., 2009] Quirós-Pacheco, F., Correia, C., et Esposito, S. (2009). Fourier transform wavefront reconstruction for the pyramid wavefront sensor. In *Proc. of the AO4ELT Conference*. EDP Sciences. [64](#), [212](#)

- [Ragazzoni, 1996] Ragazzoni, R. (1996). Pupil plane wavefront sensing with an oscillating prism. *Journal of Modern Optics*, 43 :289–293. [37](#)
- [Ragazzoni *et al.*, 2000] Ragazzoni, R., Marchetti, E., et Valente, G. (2000). Adaptive-optics corrections available for the whole sky. *Nature*, 403 :54–56. [16](#), [45](#)
- [Ramos *et al.*, 2008] Ramos, L. F. R., Garcia, J. J. D., Meseguer, J. J. P., Hernando, Y. M., et Ramos, J. M. R. (2008). Fpga-based slope computation for elts adaptive optics wavefront sensors. In Hubin, N., Max, C. E., et Wizinowich, P. L., editors, *Proc. of the SPIE*, volume 7015, page 701530. [88](#)
- [Åström, 2006] Åström, K. J. (2006). *Introduction to Stochastic Control Theory*. Dover Publications Inc., New York. Originally published : New York, Academic Press, 1970, in series : Mathematics in science and engineering series, V. 70. [97](#), [100](#)
- [Raynaud *et al.*, 2010] Raynaud, H.-F., Correia, C., Kulcsár, C., et Conan, J.-M. (2010). Minimum variance control of astronomical adaptive optics systems with actuator dynamics under synchronous and asynchronous sampling. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* (accepted). [174](#), [182](#), [184](#)
- [Rembe *et al.*, 2000] Rembe, C., Hart, M., Helmbrecht, M., Srinivasan, U., Muller, R., Lau, K., et Howe, R. (2000). Stroboscopic interferometer with variable magnification to measure dynamics in an adaptive-optics micromirror. *Conference on Optical MEMS, 2000 IEEE/LEOS International*, pages 73–74.
- [Ren *et al.*, 2005] Ren, H., Dekany, R., et Britton, M. (2005). Large-scale wave-front reconstruction for adaptive optics systems by use of a recursive filtering algorithm. *Appl. Opt.*, 44 :2626–2637. [150](#)
- [Riccardi *et al.*, 2004] Riccardi, A., Brusa, G., Xompero, M., Zanotti, D., Vecchio, C. D., Salinari, P., Ranfagni, P., Gallieni, D., Biasi, R., Andrighettoni, M., Miller, S., et Mantegazza, P. (2004). The adaptive secondary mirrors for the Large Binocular Telescope : a progress report. In Calia, D. B., Ellerbroek, B. L., et Ragazzoni, R., editors, *Proc. of the SPIE*, volume 5490, pages 1564–1571. [17](#), [40](#), [169](#)
- [Riccardi *et al.*, 2008] Riccardi, A., Xompero, M., Zanotti, D., Busoni, L., Del Vecchio, C., Salinari, P., Ranfagni, P., Brusa Zappellini, G., Biasi, R., Andrighettoni, M., Gallieni, D., Anacleto, E., Martin, H. M., et Miller, S. M. (2008). The adaptive secondary mirror for the Large Binocular Telescope : results of acceptance laboratory test. In *Proc. of the SPIE*, volume 7015. [40](#)
- [Rigaut et Gendron, 1992] Rigaut, F. et Gendron, E. (1992). Laser guide star in adaptive optics - the tilt determination problem. *Astronomy and Astrophysics*, 261 :677–684. [154](#)
- [Rigaut *et al.*, 1998] Rigaut, F. J., Véran, J.-P., et Lai, O. (1998). Analytical model for Shack-Hartmann-based adaptive optics systems. In Bonaccini, D. et Tyson, R. K., editors, *Proc. of the SPIE*, volume 3353, pages 1038–1048. [44](#)
- [Rivera *et al.*, 1985] Rivera, D. E., Morarl, M., et Skogestad, S. (1985). Internal Model Control 4. PID Controller Design. *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev.*, 25 :252–265. [107](#), [125](#)
- [Roddier, 1981] Roddier, F. (1981). *The effects of atmospheric turbulence in optical astronomy*, volume XIX of *Progress in Optics*, pages 281–376. [24](#), [25](#)
- [Roddier, 1999] Roddier, F. (1999). *Adaptive Optics in Astronomy*. Cambridge University Press, New York. [26](#), [37](#), [38](#), [46](#), [68](#)
- [Roddier *et al.*, 1993] Roddier, F., Northcott, M. J., Graves, J. E., McKenna, D. L., et Roddier, D. (1993). One-dimensional spectra of turbulence-induced Zernike aberrations : time-delay and isoplanicity error in partial adaptive compensation. *J. Opt. Soc. Am. A*, 10(5) :957–965. [27](#)

- [Roddier et Roddier, 1991] Roddier, F. et Roddier, C. (1991). Wavefront reconstruction using iterative Fourier transforms. *Appl. Opt.*, 30(11) :1325–1327. [75](#)
- [Roddier, 1990] Roddier, N. (1990). Atmospheric wavefront simulation using Zernike polynomials. *Optical Engineering*, 29 :1174–1180. [32](#)
- [Roggemann et Welch, 1996] Roggemann, M. C. et Welch, B. (1996). *Imaging through turbulence*. CRC Press, Boca Raton. [68](#)
- [Ross, 2009] Ross, T. S. (2009). Limitations and applicability of the Maréchal approximation. *Appl. Opt.*, 48(10) :1812–1818. [30](#)
- [Rousset *et al.*, 1990] Rousset, G., Fontanella, J. C., Kern, P., Gigan, P., et Rigaut, F. (1990). First diffraction-limited astronomical images with adaptive optics. *Astronomy and Astrophysics*, 230 :L29–L32. [15](#), [35](#)
- [Rousset *et al.*, 2000] Rousset, G., Lacombe, F., Puget, P., Gendron, E., Arsenault, R., Kern, P. Y., Rabaud, D., Madec, P.-Y., Hubin, N. N., Zins, G., Stadler, E., Charton, J., Gigan, P., et Feautrier, P. (2000). Status of the VLT Nasmyth adaptive optics system (NAOS). In *Proc. SPIE Vol. 4007, p. 72-81, Adaptive Optical Systems Technology, Peter L. Wizinowich ; Ed.*, volume 4007, pages 72–81. [15](#), [35](#)
- [Saad, 1996] Saad, Y. (1996). *Iterative Methods for sparse linear systems*. SIAM, Boston, Massachussets, 2nd edition. [61](#), [140](#), [148](#), [149](#), [150](#)
- [Schwartz *et al.*, 1994] Schwartz, C., Baum, G., et Ribak, E. N. (1994). Turbulence-degraded wave fronts as fractal surfaces. *J. Opt. Soc. Am. A*, 11 :444–451. [32](#), [61](#), [123](#)
- [Sedghi, 2007] Sedghi, B. (2007). E-ELT Main Axis Control Analysis, Issue 3. Technical report, European Southern Observatory. [28](#), [40](#), [205](#)
- [Shi *et al.*, 2002] Shi, F., MacMartin, D., Troy, M., Brack, G. L., Burruss, R. S., Truong, T., et Dekany, R. (2002). Local wavefront reconstruction : Simulations, experiments and predictions. [61](#)
- [Söderström, 2002] Söderström, T. (2002). *Discrete-time Stochastic Systems*. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing. Springer-Verlag, London. [97](#), [100](#), [114](#), [133](#), [173](#)
- [Southwell, 1980] Southwell, W. H. (1980). Wave-front estimation from wave-front slope measurements. *J. Opt. Soc. Am. A*, 70 :998–1006. [53](#), [63](#), [78](#)
- [Tallon *et al.*, 1992] Tallon, M., Foy, R., et Vermin, J. (1992). 3-D Wavefront Sensing for Multiconjugate Adaptive Optics. In M.-H. Ulrich, editor, *European Southern Observatory Astrophysics Symposia*, volume 42, pages 517–+. [16](#), [45](#)
- [Tallon *et al.*, 2007] Tallon, M., Thiébaud, E., et Béchet, C. (2007). A fractal iterative method for fast wavefront reconstruction for extremely large telescopes. In *Adaptive Optics : Analysis and Methods/Computational Optical Sensing and Imaging/Information Photonics/Signal Recovery and Synthesis Topical Meetings on CD-ROM*, page PMA2. Optical Society of America. [106](#), [123](#), [150](#)
- [Taylor, 1938] Taylor, G. I. (1938). The spectrum of turbulence. In *Proc. Royal Society of London Series A, Mathematical and Physical Sciences*, volume 164, pages 476–490. [27](#)
- [Thomas *et al.*, 2006] Thomas, S., Fusco, T., Tokovinin, A., Nicolle, M., Michau, V., et Rousset, G. (2006). Comparison of centroid computation algorithms in a Shack-Hartmann sensor. , 371 :323–336. [37](#)
- [Timoshenko, 1959] Timoshenko, S. P. (1959). *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill. [193](#)
- [Tokovinin *et al.*, 2000] Tokovinin, A., Louarn, M. L., et Sarazin, M. (2000). Isoplanatism in a multiconjugate adaptive optics system. *J. Opt. Soc. Am. A*, 17(10) :1819–1827. [16](#), [45](#)



- [Tokovinin et Viard, 2001] Tokovinin, A. et Viard, E. (2001). Limiting precision of tomographic phase estimation. *J. Opt. Soc. Am. A*, 18(4) :873–882. [16](#), [45](#)
- [Troch, 1988] Troch, I. (1988). Solving the Discrete Lyapunov Equation Using the Solution of the Corresponding Continuous Lyapunov Equation and Vice Versa. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(10) :944–966. [218](#)
- [Vaccaro, 1995] Vaccaro, R. J. (1995). *Digital Control : A State-Space Approach*. McGraw-Hill. [196](#)
- [van Loan, 1978] van Loan, C. F. (1978). Computing integrals involving the matrix exponential. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 23(3). [217](#)
- [Véran et Herriot, 2006] Véran, J.-P. et Herriot, G. (2006). Woofer-tweeter tip-tilt control for NFIRAOS on TMT. In *Proc. of the SPIE*, volume 6272. [187](#), [207](#), [208](#)
- [Vérinaud, 2004] Vérinaud, C. (2004). On the nature of the measurements provided by a pyramid wave-front sensor. *Opt. Comm.*, 233 :27–38. [38](#)
- [Vernet *et al.*, 2008] Vernet, E., Jochum, L., Penna, P. L., Hubin, N., Muradore, R., Casalta, J. M., Kjelberg, I., Sinquin, J.-C., Locre, F., Morin, P., Cousty, R., Lurcon, J.-M., Roland, J.-J., Crepy, B., Gabriel, E., Biasi, R., Andrighettoni, M., Angerer, G., Gallieni, D., Mantegazza, M., Tintori, M., Molinari, E., Tresoldi, D., Toso, G., Spano, P., Riva, M., Crimi, G., Riccardi, A., Marque, G., Carel, J.-L., et Ruch, E. (2008). The field stabilization and adaptive optics mirrors for the European Extremely Large Telescope. In Hubin, N., Max, C. E., et Wizinowich, P. L., editors, *Proc. of the SPIE*, volume 7015, page 70150S. [169](#), [210](#)
- [Vogel, 2002] Vogel, C. (2002). *Computational Methods for Inverse Problems*. Society for Industrial & Applied Mathematics. [149](#)
- [Vogel et Yang, 2004] Vogel, C. et Yang (2004). Multigrid algorithm for least squares wave-front reconstruction. *Appl. Opt.*, 45(4) :705–715. [150](#)
- [Vogel, 2004] Vogel, C. R. (2004). Sparse matrix methods for wavefront reconstruction, revisited. In *Proc. of the SPIE*, volume 5490, pages 1327–1335. [61](#)
- [Walker, 1999] Walker, J. S. (1999). *A primer on Wavelets and their Scientific Applications*. Studies in Advanced Mathematics. Chapman and Hall/CRC. [61](#)
- [Wallner, 1983] Wallner, E. P. (1983). Optimal wave-front correction using slope measurements. *J. Opt. Soc. Am.*, 73(12) :1771–1776. [57](#), [116](#)
- [Wang et Markey, 1978] Wang, J. Y. et Markey, J. K. (1978). Modal compensation of atmospheric turbulence phase distortion. *J. Opt. Soc. Am. A*, 68 :78–87. [194](#)
- [Wiberg *et al.*, 1994a] Wiberg, D. M., Max, C. E., et Gavel, D. T. (1994a). A spatial non-dynamic LQG controller part I, application to adaptive optics. In *43rd IEEE Conference on Decision and Control, 2004. CDC*, volume 3. [107](#)
- [Wiberg *et al.*, 1994b] Wiberg, D. M., Max, C. E., et Gavel, D. T. (1994b). A spatial non-dynamic LQG controller : Part II, theory. In *43rd IEEE Conference on Decision and Control, 2004. CDC*, volume 3, pages 3333– 3338. [61](#), [107](#)
- [Wiener, 1949] Wiener, N. (1949). *Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series*. Wiley, New York. [70](#)
- [Witsenhausen, 1971] Witsenhausen, H. S. (1971). Separation of estimation and control for discrete time systems. *Proc. of the IEEE*, 59(11) :1557–1971. [99](#)

- [Wu et Jonckheere, 1992] Wu, B.-F. et Jonckheere, E. (1992). A simplified approach to Bode's theorem for continuous-time and discrete-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(11) :1797–1802. [113](#)
- [Yang *et al.*, 2004] Yang, C., Ng, E. G., et Penczek, P. A. (2004). Matrix-free constructions of circulant and block circulant preconditioners. *Numer. Linear Algebra Appl.*, 11 :773–793. [153](#)
- [Yang et Vogel, 2006] Yang, Q. et Vogel, C. R. (2006). Fourier domain algorithm for the fitting step in multi-conjugate adaptive optics. In Ellerbroek, B. L. et Calia, D. B., editors, *Proc. of the SPIE - Advances in Adaptive Optics II*, volume 6272, page 62722T. [142](#)
- [Yang *et al.*, 2006] Yang, Q., Vogel, C. R., et Ellerbroek, B. L. (2006). Fourier domain preconditioned conjugate gradient algorithm for atmospheric tomography. *Appl. Opt.*, 45(21) :5281–5293. [17](#), [132](#), [138](#), [151](#), [152](#), [161](#)
- [Zou et Rolland, 2006] Zou, W. et Rolland, J. P. (2006). Quantifications of error propagation in slope-based wavefront estimations. *J. Opt. Soc. Am. A*, 23(10) :2629–2638. [78](#), [86](#)

# Table des figures

1.1	Historique succinct de l'évolution des télescopes depuis Galilée. . . . .	16
2.1	FEP théoriques d'un système sans aberrations. . . . .	22
2.2	Le phénomène turbulent comme imaginé par Leonardo da Vinci (1452-1519). . . . .	23
2.3	Profil de $C_n^2$ à Paranal. . . . .	24
2.4	Covariance spatiale de la phase en fonction de la distance. . . . .	27
2.5	DSP des modèles de von Kármán et Kolmogorov. . . . .	28
2.6	DSP de l'angle d'arrivée. . . . .	29
2.7	Représentation bidimensionnelle des premiers polynômes de Zernike. . . . .	31
2.8	Variance des modes de Zernike et matrice de réorthogonalisation. . . . .	33
2.9	Modes de basculement. . . . .	34
2.10	Principe de fonctionnement de l'optique adaptative en astronomie. . . . .	35
2.11	L'analyseur Hartmann-Shack. . . . .	36
2.12	Principe d'opération de l'analyseur pyramide. . . . .	38
2.13	Fonctions d'influence du miroir déformable. . . . .	39
2.14	Chronogramme d'opérations en OA . . . . .	41
2.15	Espace des vecteurs de phase $\Psi$ , mesures $(\ker(D)^\perp)$ et MD $(\mathcal{M})$ . . . . .	41
2.16	Mode gaufre. . . . .	42
2.17	Rapport de variances de la phase échantillonnée et repliée. . . . .	43
2.18	Anisoplanatisme en OA. . . . .	44
2.19	Correction par OA classique et OAMC . . . . .	45
2.20	Schéma-bloc d'une OA. . . . .	46
2.21	Transferts de phase et de bruit. . . . .	47
2.22	Fonctions de transfert continues et discrètes. . . . .	48
2.23	Diagramme de Bode et lieu de pôles de l'intégrateur. . . . .	49
2.24	Principe de la minimisation de phase résiduelle IGMO. . . . .	50
3.1	Décomposition en valeurs singulières de la matrice d'interaction. . . . .	59
3.2	Gaufre localisé. . . . .	60
3.3	Gaufre localisé, pupille circulaire. . . . .	60
3.4	Configurations (ou géométries) de Hudgin , Fried et Southwell. . . . .	62
3.5	Matrices D et N zonales. . . . .	64
3.6	Illustration de la transformée de Fourier d'une séquence discrète périodique. . . . .	66
3.7	Méthodes d'extension pour les géométries de Hudgin et Fried. . . . .	72
3.8	Illustration des étapes de l'algorithme de Gerchberg-Papoulis. . . . .	74
3.9	Etapes de l'algorithme de Gerchberg modifié. . . . .	74



3.10	Coefficients de propagation du bruit. . . . .	78
3.11	Performance en rapport de Strehl en fonction des méthodes d'extension. . . . .	81
3.12	Performance en rapport de Strehl en fonction du niveau de sous-éclairage. . . . .	82
3.13	Performance en rapport de Strehl en fonction du pourcentage d'occultation centrale. . . . .	83
3.14	Performance en rapport de Strehl en fonction de la magnitude de l'étoile guide. . . . .	84
3.15	Propagation du bruit en fonction de la taille de la grille de reconstruction. . . . .	85
3.16	Moyenne radiale de la FEP sur 100 tirages de phase aléatoires. . . . .	87
3.17	Enchaînement temporel des opérations pour les reconstituteurs VMMr et FFTr. . . . .	88
3.18	Comparaison des VVMr et FFTr en fonction du nombre de degrés de liberté. . . . .	89
4.1	Séparation de l'estimation et de la commande. . . . .	99
4.2	Etapes du développement de l'approche LQG. . . . .	101
4.3	Structure complète du régulateur LQG. . . . .	106
4.4	Exemple de fonctions de transfert pour le TT . . . . .	113
4.5	Coefficients de la matrice $\mathcal{A}_{\text{tur}}$ pour des télescopes de 8m et 42m . . . . .	119
4.6	Fonction d'auto-corrélation théorique et celle obtenue par modélisation AR1 . . . . .	120
4.7	Fonction d'auto-corrélation théorique et celle obtenue par modélisation AR1 pour le TT . . . . .	121
4.8	Fonction d'auto-corrélation théorique et celle obtenue par modélisation AR1 pour l'AA) . . . . .	122
4.9	Comparaison des DSP temporelles du TT atmosphérique et induit du système E-ELT M4-M5 . . . . .	122
4.10	Structure du régulateur POLC . . . . .	124
4.11	Structure du régulateur $FrIM+IMC$ . . . . .	126
5.1	Taux de convergence d'algorithme de résolution de ARE. . . . .	135
5.2	Structure complète de la commande LQG. . . . .	136
5.3	Matrices D et N zonales. . . . .	139
5.4	Matrice de covariance zonale de phase. . . . .	141
5.5	Laplacien et opérateur bi-harmonique. . . . .	145
5.6	Coupe radiale des DSP de la perturbation de phase $\phi^{\text{tur}}$ , phase estimée $\hat{\phi}^{\text{tur}}$ et erreur $\phi^{\text{err}}$ . . . . .	146
5.7	$\Sigma_{\infty}$ : solution exacte, approximée et différence. . . . .	147
5.8	Matrice $(C_d^{\text{tur}})^T C_d^{\text{tur}}$ et matrice $\sigma_w^2 \Sigma_{\infty}^{-1}$ pour un système de 20 par 20 sous-pupilles. . . . .	153
5.9	Complexité calculatoire de la commande LQG. . . . .	156
5.10	Décomposition en valeurs singulières de la matrice de projection sur l'espace MD. . . . .	159
5.11	FEP longue pose pour commandes LQG modale et zonale (coupes radiales). . . . .	160
5.12	FEP longue pose pour commandes LQG zonale et FD-PCG-LQG (coupes radiales). . . . .	161
5.13	Performance du FD-PCG-LQG en fonction de la magnitude. . . . .	162
5.14	Complexité calculatoire de la commande LQG modale et zonale. . . . .	163
5.15	Matrice $\Sigma_{\infty}$ en OAMC . . . . .	164
6.1	Étapes du développement de l'approche LQG. . . . .	170
6.2	Espaces de correction engendrés par le woofer et le tweeter . . . . .	187
6.3	Architecture de commande en boucle fermée du woofer-tweeter . . . . .	188
6.4	DSP temporelle du TT atmosphérique et du TT induit par le vent dans le système E-ELT M4-M5 . . . . .	192
6.5	Fonctions de transfert du TT et défocus . . . . .	194
6.6	Diagramme de Bode du TT du modèle mécanique à éléments finis . . . . .	195

6.7	Variantes d'utilisation du simulateur Monte Carlo . . . . .	196
6.8	Procédure d'obtention de la phase moyenne et de la phase moyenne pondérée . . . . .	197
6.9	DSP de la perturbation et du MD face aux fonctions de réjection . . . . .	200
6.10	Comparaison de performance . . . . .	201
6.11	Variation de la constante de temps d'un facteur de 2 et 5 fois . . . . .	202
6.12	Réponses fréquentielles de la perturbation et du MD . . . . .	203
6.13	Variation de la fréquence de résonance naturelle de $\pm 20\%$ au tour de la valeur nominale	203
6.14	Comparaison de performance des régulateurs optimal et sous-optimal . . . . .	206
6.15	Performances du régulateur optimal pour deux niveaux de bruit . . . . .	206
6.16	Comportement du régulateur optimal en fonction des paramètres du modèle de perturbation . . . . .	207
6.17	DSP du TT atmosphérique et du TT induit par le vent ; Diagramme de Bode MD NFIRAOS . . . . .	208
6.18	TT résiduel en mas rms en fonction du bruit de mesure . . . . .	209
6.19	Trajectoires temporelles du woofer-tweeter de NFIRAOS . . . . .	209



# Liste des tableaux

2.1	Bruit de mesure du HS . . . . .	37
3.1	Filtres en espace de Fourier . . . . .	69
3.2	Paramètres du simulateur Monte Carlo . . . . .	80
5.1	Complexité calculatoire des algorithmes de commande. . . . .	156
5.2	Complexité des algorithmes de commande VMMr et LQG. . . . .	157
5.3	Paramètres du simulateur Monte Carlo . . . . .	158
5.4	Rapport de Strehl longue pose pour les commandes LQG modale et zonale . . . . .	159
5.5	Rapport de Strehl longue pose pour la commande zonale et le FD-PCG-PCG . . . . .	160



## Résumé

L'optique adaptative (OA) permet de corriger les effets induits par la turbulence atmosphérique, qui dégradent la résolution des télescopes et donc la qualité des images. Introduits dans les années 1990, les systèmes d'OA deviennent désormais tomographiques, permettant l'analyse du volume turbulent pour une correction à grand champ. Ceci s'accompagne d'une forte augmentation de la complexité des OA des futurs grands télescopes.

Les nouveaux concepts d'OA souvent à grands nombres de degrés de liberté (GNDL) requièrent des lois de commande innovantes respectant les contraintes temps réel. Plusieurs aspects originaux sont abordés. Pour les GNDL, le point d'entrée est le choix de la base de représentation de la phase. Deux voies sont explorées : avec une formulation zonale, des méthodes Fourier sont étudiées pour la reconstruction statique de front d'onde ; une nouvelle stratégie combinant méthodes Fourier et méthodes itératives est développée pour adapter la commande optimale linéaire quadratique gaussienne (LQG) aux GNDL.

On traite ensuite le problème des dynamiques temporelles des grands miroirs déformables. Pour des dynamiques linéaires, la commande optimale minimisant la variance résiduelle est obtenue comme solution d'un problème LQG à temps discret. Ceci permet aussi de quantifier la dégradation de performances pour des commandes sous-optimales. Cette approche est appliquée à la commande des miroirs de basculement destinés aux grands télescopes. On montre que négliger la dynamique conduit à une dégradation significative des performances. Une autre application est traitée : la coordination d'un miroir lent et d'un miroir rapide (concept woofer-tweeter).

**Mots Clés :** optique adaptative, commande LQG, filtre de Kalman, transformée de Fourier, reconstruction et analyse de front d'onde.

## Summary

Adaptive optics (AO) enables to correct the effects induced by atmospheric turbulence, which affect telescopes' resolution and hence image quality. Introduced in the 1990s, AO systems become tomographic, allowing to analyze turbulence in volume in order to achieve wide-field correction. For future large telescopes, this goes together with a sharp increase in complexity.

New AO concepts, often exhibiting large number of degrees of freedom (LNDF), require innovative control laws compatible with real-time constraints.

Several original aspects are addressed. For LNDFs, the entry point is the selection of a basis for the turbulent phase. Two directions are explored : with a zonal formulation, Fourier methods for static wavefront reconstruction are investigated ; a new strategy combining Fourier and iterative methods is developed to adapt optimal Linear Quadratic Gaussian (LQG) control to LNDFs.

The issue of large deformable mirror's temporal dynamics is addressed. For linear dynamics, the optimal control minimizing residual variance is obtained as the solution of a discrete-time LQG problem. This also enables to quantify the degradation in performance with suboptimal controllers.

This approach is applied to the control of tip-tilt mirrors developed for large telescopes. It is shown that neglecting dynamics results in significant performance degradation. Another application is dealt with : the coordination of slow and fast mirrors (woofer-tweeter concept).

**Keywords :** adaptive optics, LQG control, Kalman filter, Fourier transform, wavefront reconstruction

